



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Это цифровая копия книги, хранящейся для потомков на библиотечных полках, прежде чем ее отсканировали сотрудники компании Google в рамках проекта, цель которого - сделать книги со всего мира доступными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских прав на эту книгу истек, и она перешла в свободный доступ. Книга переходит в свободный доступ, если на нее не были поданы авторские права или срок действия авторских прав истек. Переход книги в свободный доступ в разных странах осуществляется по-разному. Книги, перешедшие в свободный доступ, это наш ключ к прошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все пометки, примечания и другие записи, существующие в оригинальном издании, как напоминание о том долгом пути, который книга прошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использования

Компания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы перевести книги, перешедшие в свободный доступ, в цифровой формат и сделать их широкодоступными. Книги, перешедшие в свободный доступ, принадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, поэтому, чтобы и в дальнейшем предоставлять этот ресурс, мы предприняли некоторые действия, предотвращающие коммерческое использование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические записи.

Мы также просим Вас о следующем.

- Не используйте файлы в коммерческих целях.
Мы разработали программу Поиск книг Google для всех пользователей, поэтому используйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.
- Не отправляйте автоматические записи.
Не отправляйте в систему Google автоматические записи любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного перевода, оптического распознавания символов или других областей, где доступ к большому количеству текста может оказаться полезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем использовать материалы, перешедшие в свободный доступ.
- Не удаляйте атрибуты Google.
В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он позволяет пользователям узнать об этом проекте и помогает им найти дополнительные материалы при помощи программы Поиск книг Google. Не удаляйте его.
- Делайте это законно.
Независимо от того, что Вы используете, не забудьте проверить законность своих действий, за которые Вы несете полную ответственность. Не думайте, что если книга перешла в свободный доступ в США, то ее на этом основании могут использовать читатели из других стран. Условия для перехода книги в свободный доступ в разных странах различны, поэтому нет единых правил, позволяющих определить, можно ли в определенном случае использовать определенную книгу. Не думайте, что если книга появилась в Поиске книг Google, то ее можно использовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских прав может быть очень серьезным.

О программе Поиск книг Google

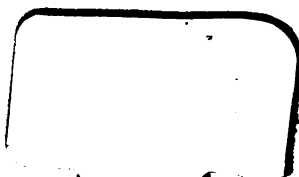
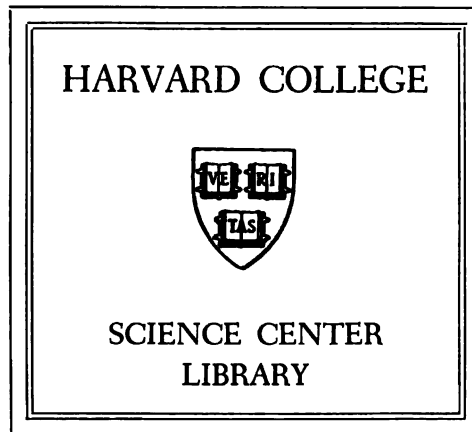
Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне доступной и полезной. Программа Поиск книг Google помогает пользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый поиск по этой книге можно выполнить на странице <http://books.google.com/>

5.1(10, no. 2-4)

RY
F
a
sia. Univ. Fiz-matemat.

1900 and 1901

Sci 1105.1 (10, no. 2-4)



502.12
10
2-4
same 4 in
for #1

Sci 1105.1

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE
de Kasan.

Deuxième série. Tome X. № 2.

MAR 20 1900

Kazan Univ.

Physico-Math. Soc.

Journal

Vol. 10

ИЗВѢСТІЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ X.

№ 2.

КАЗАНЬ.

Типо-литографія Императорскаго Университета.

1900.

СОДЕРЖАНИЕ.

I.

И. И. Аристовъ. Объ итерациѣ функций.

P. S. Poretzky. Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques.

И. Бѣлякинъ. Второй дифференціальный параметръ квадратичной въ дифференціалахъ формы n независимыхъ переменныхъ.

Д. Н. Зейлигеръ. Объ одномъ функциональномъ уравненіи.

II.

Лѣтопись Физико-Математическаго Общества.

Протоколы, 95—96 засѣданій Ф.—М. Общества.

Н. В. Нечаевъ. А. К. Жбиковскій.

Д. Гильбертъ. Понятіе о числѣ (переводъ А. В. Васильева.)
Объявленія.

Table des matières.

I. Aristof. Sur l'itération des fonctions.

P. S. Poretzky. Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques.

I. Beljankine. Sur le second paramètre de la forme différentielle quadratique.

D. N. Seiliger. Sur une équation fonctionnelle.

Procès-verbaux de séance 95—96 de la Société Physico-mathématique.

N. Netchaïef. A. K. Jbikovsky (nécrologue).

D. Hilbert. La notion du nombre (trad. par A. Vassilief).
Annonces.

Ⓢ

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE
de Kasan.

Deuxième série. Tome X. № 2.

Kazan, Russia - Univ. - Fiziko-matematicheskoe obshchestvo

ИЗВѢСТІЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ X.

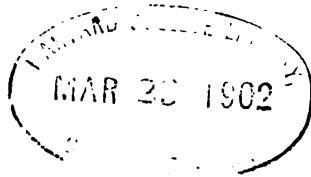
№ 2.



КАЗАНЬ.

Типо-литографія Императорскаго Университета.

1900.



The Annals of Mathematics

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества
при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ*.

Объ итерациі функцій.

Глава III.

Разсмотрѣвъ свойства предѣльныхъ точекъ итерациі, обратимся къ изслѣдованію уравненій Schröder'a и Abel'я.

Изслѣдованіе это основывается на нижеслѣдующихъ леммахъ и теоремахъ данныхъ Koenigs'омъ ¹⁾.

§ 1. Лемма I. Если $f(z)$ есть функція z , голоморфная въ точкѣ x и обращающаяся въ нуль въ этой точкѣ, то можно найти число h настолько большое, что строка

$$\sum_h^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

будетъ имѣть конечную величину и будетъ равномерно сходящеюся во всемъ кругѣ C_x .

Мы можемъ положить

$$f(z) = (z-x)^m \theta(z),$$

гдѣ m число цѣлое ≥ 1 , а съ $\theta(z)$ функція, голоморфная внутри круга C_0 съ центромъ въ x .

Будемъ называть *высотой* точки z относительно круга C_0 , лежащаго внутри C_x , число подстановокъ, необходимое и достаточное, чтобы перейти отъ точки z къ точкѣ, лежащей внутри круга C_0 .

Пусть h есть наибольшая высота точекъ круга C_x относительно C_0 . Мы будемъ считать $h=0$ если C_0 не находится внутри C_x .

¹⁾ Recherches sur les intégrales des certaines équations fonctionnelles
Ann. de l'Ec. Norm., 1. 1884.

Назовемъ Θ количество, удовлетворяющее неравенству

$$\text{mod} \theta(z) < \Theta$$

для точекъ z , лежащихъ внутри круга C_0 . Тогда достаточно условия $i \geq h$, чтобы функция $\theta[\varphi_i(z)]$ была голоморфна въ кругѣ C_x и чтобы удовлетворялось неравенство

$$\text{mod} \theta[\varphi_i(z)] < \Theta.$$

Пусть H есть количество, заключенное между 0 и 1. Въ предыдущей главѣ мы видѣли, что

$$\text{mod} \frac{\varphi(z)-x}{z-x} < H, \text{ mod} \frac{\varphi(z_1)-x}{z_1-x} < H, \dots, \text{mod} \frac{\varphi(z_i)-x}{z_i-x} < H,$$

а потому

$$\text{mod}(z_i-x) < H^i r,$$

гдѣ r есть радіусъ круга C_x .

Слѣдовательно, такъ какъ для $q \geq h$

$$\sum_q^{\infty} \text{mod} f[\varphi_i(z)] < \Theta \sum_q^{\infty} \text{mod}(z_i-x)^m,$$

то

$$\sum_q^{\infty} \text{mod} f[\varphi_i(z)] < \frac{\Theta r^m}{1-H^m} \cdot H^{mq}.$$

Если въ этомъ неравенствѣ положимъ $q=h$, то абсолютная сходимость строки

$$\sum_h^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

будетъ доказана; если же остановимся въ этой строкѣ на членѣ съ индексомъ q и назовемъ остатокъ R_q , то предыдущее неравенство показываетъ, что

$$\text{mod} R_q < \frac{\Theta r^m}{1-H^m} \cdot H^{mq},$$

откуда равномерная сходимость очевидна.

Лемма II. Если $F(z)$ есть функция, голоморфная в точке x и равная единице в этой точке, то можно всегда найти настолько большее число g , что произведение

$$\prod_g F[\varphi_i(z)]$$

будет иметь конечную величину и может быть представлено в виде

$$G(z) \cdot e^{\sum_h f[\varphi_i(z)]}$$

где $G(z)$ есть функция, голоморфная в круге C_x и строка $\sum_h$ равномерно сходится в том же круге.

Положимъ

$$F(z) = 1 + (z-x)^m \psi(z),$$

где m есть целое число ≥ 1 , а $\psi(z)$ функция, голоморфная в круге C_ψ . Пусть g есть наибольшая высота точек круга C_x относительно круга C_ψ . Пусть Ψ есть количество, удовлетворяющее неравенству

$$\text{mod} \psi(z) < \Psi$$

для внутренних точек круга C_ψ .

Мы будем иметь

$$\text{mod}(z-x)^m \psi(z) < 1$$

для внутренних точек круга Γ с центромъ в x и с

радиусомъ $\frac{1}{\sqrt{\Psi}}$. Следовательно все ветви функции

$$\log[1 + (z-x)^m \psi(z)]$$

голоморфны в круге Γ . Пусть $f(z)$ есть та изъ нихъ, которая обращается в нуль в точке x . Если h есть наибольшая высота точек круга C_x относительно круга Γ , то достаточно взять $i \geq h$, чтобы $f[\varphi_i(z)]$ была голоморфна в круге C_x и чтобы строка

$$\sum_h^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

была бы равномерно сходящеюся въ этомъ кругѣ.

Можно взять Ψ достаточно большимъ, чтобы кругъ Γ находился внутри круга C_ψ , т. е. всегда можно предположить $h \geq g$; и если $i \geq h$, то можно положить

$$F[\varphi_i(z)] = e^{\frac{f[\varphi_i(z)]}{h}},$$

а слѣдовательно

$$\prod_h^{\infty} F[\varphi_i(z)] = e^{\sum_h^{\infty} \frac{f[\varphi_i(z)]}{h}}.$$

Произведение

$$\prod_g^{h-1} F[\varphi_i(z)] = G(z)$$

голоморфно въ кругѣ C_x , такъ что

$$\prod_g^{\infty} f[\varphi_i(z)] = G(z) \cdot e^{\sum_h^{\infty} f[\varphi_i(z)]}$$

и теорема доказана.

Возьмемъ произведение

$$\prod_p^q F[\varphi_i(z)] = e^{\sum_p^q \frac{f[\varphi_i(z)]}{p}}$$

гдѣ

$$q > p \geq h.$$

Пусть

$$f(z) = (z-x)^m \theta(z).$$

Тогда по предыдущему

$$\sum_p^q \text{mod} f[\varphi_i(z)] < \Theta[\text{mod}(z_p - x)^m + \text{mod}(z_{p+1} - x)^m + \dots + \text{mod}(z_q - x)^m]$$

и тѣмъ болѣе

$$\sum_p^q \text{modf}[\varphi_i(z)] < \Theta[(H^p r)^m + (H^{p+1} r)^m + \dots + (H^q r)^m]$$

и слѣдовательно

$$\sum_p^q \text{modf}[\varphi_i(z)] < \frac{\Theta r^m}{1-H^m} \cdot H^{mp} < \frac{\Theta r^m}{1-H^m}.$$

Такъ какъ всегда

$$\text{mode}^u < e^{\text{modu}}$$

то

$$\text{mod} \prod_p^q F[\varphi_i(z)] < e^{\frac{\Theta r^m}{1-H^m}}$$

Слѣдовательно, каковы бы ни были p и q , лишь бы $q > p \geq h$, можно всегда найти количество, независящее отъ p и q и конечное, такое, что $\text{mod} \prod_p^q F[\varphi_i(z)]$ будетъ меньше его.

Это замѣчаніе послужитъ намъ при доказательствѣ слѣдующей леммы.

Лемма III. Строка

$$\sum_0^\infty \frac{d\varphi_i(z)}{dz}$$

равномерно сходится въ кругъ C_x .

Можно представить функцію $\varphi(z)$ слѣдующимъ образомъ

$$\varphi(z) = x + (z-x)\varphi'(x)[1 + (z-x)^m \eta(z-x)],$$

гдѣ $(\eta z-x)$ есть функція, голоморфная въ кругѣ C_x , а m цѣлое число ≥ 1 .

Означимъ для краткости

$$z-x=\zeta, \quad z_i-x=\zeta_i, \quad \varphi'(x)=a;$$

тогда

$$\zeta_{i+1} = a\zeta_i[1 + \zeta_i^m \eta(\zeta_i)]$$

Функция $1 + \zeta^m \gamma(\zeta)$ имѣетъ всѣ свойства функции $F(z)$ леммы II. Вѣтъ ея логариема, обращающаяся въ нуль въ точкѣ x голоморфна внутри круга Γ ; для $i \geq h$, гдѣ h есть наибольшая высота точекъ круга C_x относительно круга Γ , можно написать

$$1 + \zeta_i^m \gamma(\zeta_i) = e^{\lambda(\zeta_i)},$$

гдѣ $\lambda(\zeta_i)$ есть функция, голоморфная внутри круга C_x ; следовательно

$$\zeta_{i+1} = a \zeta_i e^{\lambda(\zeta_i)},$$

что даетъ

$$\frac{d\zeta_{i+1}}{d\zeta_i} = a e^{\lambda(\zeta_i)} [1 + \zeta_i \lambda'(\zeta_i)]$$

Функция $1 + \zeta_i \lambda'(\zeta_i)$ также имѣетъ свойства функции $F(z)$ леммы II, такъ что можно положить

$$1 + \zeta_i \lambda'(\zeta_i) = e^{\mu(\zeta_i)}$$

гдѣ $\mu(\zeta_i)$, есть функция, голоморфная въ кругѣ C_x , если $i \geq h' \geq h$. Тогда

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta} = \frac{d\zeta_i}{d\zeta_{h'}} \cdot \frac{d\zeta_{h'}}{d\zeta};$$

здѣсь

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta_{h'}} = \frac{d\zeta_i}{d\zeta_{i-1}} \cdot \frac{d\zeta_{i-1}}{d\zeta_{i-2}} \cdots \frac{d\zeta_{h'+1}}{d\zeta_{h'}}$$

и на основаніи предыдущаго

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta_{h'}} = a^{i-h'} \frac{\sum_{e^{h'}}^{i-1} \lambda(\zeta_k)}{e^{h'}} \cdot \frac{\sum_{e^{h'}}^{i-1} \mu(\zeta_k)}{e^{h'}}$$

На основаніи замѣчанія къ леммѣ II можно найти два-количества, конечныхъ и независимыхъ отъ i , такихъ, что модули

$$\frac{\sum_{e^{h'}}^{i-1} \lambda(\zeta_k)}{e^{h'}} \quad \text{и} \quad \frac{\sum_{e^{h'}}^{i-1} \mu(\zeta_k)}{e^{h'}}$$

будутъ меньше этихъ количествъ, какъ бы велико ни было i . Пусть A есть произведение этихъ количествъ; мы можемъ написать

$$\frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda(\zeta_k)}{e^{h'}} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \mu(\zeta_k)}{e^{h'}} = A \xi_i,$$

гдѣ ξ_i есть количество, зависящее отъ i , модуль котораго меньше единицы; поэтому

$$\frac{d\zeta_i}{d\zeta} = \frac{A}{a^{h'}} \cdot \frac{d\zeta_{h'}}{d\zeta} a^{i\xi_i}$$

и

$$\sum_{h'}^{\infty} \frac{d\zeta_i}{d\zeta} = \frac{A}{a^{h'}} \cdot \frac{d\zeta_{h'}}{d\zeta} \sum_{h'}^{\infty} a^{i\xi_i}.$$

Строка

$$\sum_{h'}^{\infty} a^{i\xi_i}$$

будетъ сходящеюся равномерно въ кругѣ C_x если $\text{mod } a < 1$, а слѣдовательно и строка

$$\sum_0^{\infty} \frac{d\varphi_i(z)}{dz}$$

будетъ сходящеюся въ томъ же кругѣ, если

$$\text{mod } \varphi'(x) < 1.$$

§ 2. Докажемъ слѣдующія теоремы:

Теорема 1. Если $f(z)$ есть функция, голоморфная въ точкѣ x и обращающаяся въ этой точкѣ въ нуль, то можно найти число h настолько большое, что строка

$$\sum_h^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

будетъ функцией, голоморфной во всемъ кругѣ C_x .

На основаніи леммы I строка

$$\sum_h^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

есть функція конечная и непрерывная въ кругѣ C_x . Остается, слѣдовательно, доказать, что она есть функція моногенная, т. е. что строка

$$\sum_h^{\infty} \frac{df[\varphi_i(z)]}{dz}$$

равномѣрно сходится въ кругѣ C_x .

Функція $f'(z)$ голоморфна въ томъ же кругѣ C_x съ центромъ въ x , въ которомъ голоморфна $f(z)$. Слѣдовательно, если $i \geq h$, то функція $f[\varphi_i(z)]$ голоморфна во всемъ кругѣ C_x . Пусть

$$\text{mod} f'(z) < A$$

въ кругѣ голоморфизма $f(z)$; тогда для $i \geq h$

$$\text{mod} f'[\varphi_i(z)] < A,$$

такъ что

$$\sum_h^{\infty} \text{mod} \frac{df[\varphi_i(z)]}{dz} < A \sum_h^{\infty} \text{mod} \frac{d\varphi_i(z)}{dz}.$$

По леммѣ III строка

$$\sum_h^{\infty} \text{mod} \frac{d\varphi_i(z)}{dz}$$

равномѣрно сходится въ кругѣ C_x ; слѣдовательно и строка

$$\sum_h^{\infty} \text{mod} \frac{df[\varphi_i(z)]}{dz}$$

будетъ также сходится въ кругѣ C_x , и теорема доказана.

Теорема II. Если функція $F(z)$ голоморфна и обращается въ единицу въ точку x , то можно найти достаточно большое число g , чтобы произведеніе

$$\prod_g^{\infty} F[\varphi_i(z)]$$

было функцией, голоморфной во всемъ кругѣ C_x

По леммѣ II имѣемъ

$$\prod_g^{\infty} F[\varphi_i(z)] = G(z) \cdot e^{\sum^{\infty} \lambda[\varphi_i(z)]};$$

по предыдущей теоремѣ строка

$$\sum_h^{\infty} f[\varphi_i(z)]$$

голоморфна въ кругѣ C_x ; функция $F(z)$ голоморфна въ томъ же кругѣ, а слѣдовательно теорема доказана.

Теорема III. Предѣлъ отношенія

$$\frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p}$$

голоморфенъ во всемъ кругѣ C_x .

Согласно обозначеніямъ леммы III это отношеніе можно представить въ видѣ

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_p}{a^p} &= \frac{\zeta_p}{a\zeta_{p-1}} \cdot \frac{\zeta_{p-1}}{a\zeta_{p-2}} \cdots \frac{\zeta_{h+1}}{a\zeta_h} \cdot \frac{\zeta_h}{a^h} \\ &= \frac{\zeta_h}{a^h} \prod_h^{p-1} [1 + \zeta^m_i \gamma_i(\zeta_i)]. \end{aligned}$$

Если $i \geq h$, то

$$1 + \zeta_i^m \gamma_i(\zeta_i) = e^{\lambda(\zeta_i)},$$

гдѣ $\lambda(\zeta_i)$ есть функция, голоморфная въ кругѣ C_x ; слѣдовательно

$$\frac{\zeta_p}{a^p} = \frac{\zeta_h}{a^h} \cdot e^{\sum_h^{p-1} \lambda(\zeta_i)} = \frac{\varphi_h(z) - x}{a^h} \cdot e^{\sum_h^{p-1} \lambda(\zeta_i)}$$

Когда p стремится къ безконечности, $\sum_h^{p-1} \lambda(\zeta_i)$ стремится къ нѣкоторой функціи $\omega(z)$, голоморфной въ кругѣ C_a поэтому

$$\lim \frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p} = \frac{\varphi_h(z) - x}{[\varphi'(x)]^h} \cdot e^{\omega(z)}$$

Эту функцію мы будемъ обозначать чрезъ $B(z)$, такъ что

$$B(z) = \frac{\varphi_h(z) - x}{[\varphi'(x)]^h} \cdot e^{\omega(x)}.$$

§ 3. Займется теперь изслѣдованіемъ свойствъ функціи $B(z)$.

Очевидно $B(z)$ обращается въ нуль для всѣхъ корней уравненія $\varphi_h(z) - x = 0$, лежащихъ внутри круга C_a , съ той же степенью кратности. Предѣльная точка x есть однократный корень этой функціи.

Напишемъ тождество

$$\frac{\varphi_{p+1}(z) - x}{a^{p+1}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\varphi_p \varphi(z) - x}{a^p};$$

перейдя къ предѣлу, получимъ

$$B(z) = \frac{1}{a} B[\varphi(z)]$$

Слѣдовательно функція $B(z)$ представляетъ рѣшеніе уравненія

$$\Xi[\varphi(z)] = C \Xi(z),$$

которое есть ничто иное, какъ уравненіе *Schröder'a* (Гл. I), гдѣ $\Xi(z)$ есть неизвѣстная функція, а C — постоянная.

Итакъ, рѣшеніе этого уравненія будетъ

$$\Xi(z) = B(z), \quad C = a.$$

Мы будемъ обозначать это рѣшеніе символомъ

$$\{ B(z), a \}.$$

Если n — целое положительное число и a произвольная постоянная, то очевидно, что системы

$$\{ B^n, a^n \} \text{ и } \{ aB, a \}$$

будут также удовлетворять уравнению *Schröder'a*. Следовательно общимъ рѣшеніемъ этого уравненія будетъ система

$$\{ \alpha[B(z)]^n, a^n \}$$

содержащая ∞^2 частныхъ рѣшеній.

Если n положительно, эти рѣшенія голоморфны въ кругѣ C_x ; если n отрицательно, они мероморфны въ этомъ кругѣ и въ точкѣ x . n есть всегда показатель степени кратности точекъ x .

Слѣдательно имѣетъ мѣсто такая

Теорема: *Всякое рѣшеніе уравненія Schröder'a, голоморфное или мероморфное въ точкѣ x , отличается только постояннымъ множителемъ отъ целой положительной или отрицательной степени функции $B(z)$.*

Изъ уравненія Schröder'a получаемъ

$$\Xi[\varphi_i(z)] = C^i \Xi(z),$$

что для $z=x$ обращается въ

$$(1 - C^i) \Xi(x) = 0.$$

Здѣсь $1 - C^i \neq 0$, ибо въ такомъ случаѣ $C=1$ и

$$\Xi[\varphi_i(z)] = \Xi(z),$$

что для $i = \infty$ даетъ

$$\Xi(z) - \Xi(x) = \text{Const.}$$

Слѣдовательно

$$\Xi(x) = 0,$$

т. е. всякое рѣшеніе уравненія Schröder'a, голоморфное въ точкѣ x , обращается въ нуль въ этой точкѣ.

Точка эта можетъ быть и n кратной.

Допустимъ, что

$$\Xi(z) = (z-x)^n \phi(z),$$

гдѣ $\phi(z)$ функція голоморфная и $\neq 0$ въ точкѣ x ; тогда

$$\Xi[\varphi(z)] = [\varphi(z)-x]^n \phi[\varphi(z)] = C\phi(z) \quad (\zeta-x)^n,$$

$$\dots \left[\frac{\varphi(z)-x}{z-x} \right]^n \phi[\varphi(z)] = C\phi(z);$$

когда z стремится къ x , въ предѣлѣ получимъ

$$C = [\varphi'(x)]^n = a,$$

такъ что

$$[\varphi(z)-x]^n \phi[\varphi(z)] = a^n \Xi(z)$$

и

$$[\varphi_i(z)-x]^n \phi[\varphi_i(z)] = a^{ni} \Xi(z),$$

$$\dots \left[\frac{\varphi_i(z)-x}{a^i} \right]^n \phi[\varphi_i(z)] = \Xi(z);$$

въ предѣлѣ, когда i стремится къ безконечности

$$[B(z)]^n \phi(x) = \Xi(z),$$

что и требовалось доказать. Въ случаѣ мероморфнаго рѣшенія получимъ тотъ же результатъ для отрицательнаго n .

Слѣдовательно система

$$\left\{ a[B(z)]^n, a^n \right\}$$

представляетъ всѣ ∞^3 рѣшеній уравненія Schröder'a.

Въ главѣ I мы видѣли, что если возьмемъ логарифмъ отъ обѣихъ частей уравненія Schröder'a, то получимъ уравненіе Abel'я. Раздѣливъ обѣ части полученнаго уравненія на $\lg C$ приведемъ уравненіе Abel'я къ виду

$$\Xi[\varphi(z)] = 1 + \Xi(z).$$

Рѣшеніемъ этого уравненія будетъ

$$b(z) = \frac{\lg B(z)}{\lg a}.$$

Найдемъ теперь выраженіе общаго интеграла уравненій Schröder'a Abel'я въ кругѣ C_a по извѣстной $B(z)$.

Уравненію

$$\Xi[\varphi(z)] = \Xi(z)$$

удовлетворяетъ частное двухъ рѣшеній уравненія Schröder'a и разность двухъ рѣшеній уравненія Abel'я. Слѣдовательно, если означимъ чрезъ $X(z)$ общій интегралъ этого уравненія, то общимъ интеграломъ уравненія Schröder'a будетъ

$$B(z). X(z),$$

а общимъ интеграломъ уравненія Abel'я

$$b(z) + X(z).$$

Слѣдовательно необходимо найти $X(z)$. Предположимъ, что

$$X(z) = \Omega[b(z)]$$

и опредѣлимъ Ω . Имѣемъ

$$X[\varphi(z)] = \Omega \{b[\varphi(z)]\} = \Omega[b(z) + 1];$$

но такъ какъ

$$X[\varphi(z)] = X(z),$$

то

$$\Omega[b(z) + 1] = \Omega[b(z)]$$

Слѣдовательно за Ω можно взять всякую періодическую функцію, съ періодомъ равнымъ единицѣ.

Такимъ образомъ общій интегралъ найденъ.

§ 4. Мы разсматривали до сихъ поръ уравненіе Schröder'a въ предположеніи, что итерация функціи $\varphi(z)$ правильно сходится. Предположимъ теперь, что итерация функціи $\varphi(z)$ сходится періодически съ періодомъ k .

роморфное для всѣхъ точекъ круговой группы, которое, сохраняя постоянное значеніе отношенія

$$\frac{\Xi[\varphi(z)]}{\Xi(z)}$$

въ каждомъ отдѣльномъ кругѣ C_i группы, мѣняло бы это значеніе съ переходомъ отъ одного круга къ другому.

Пусть C''_i есть кругъ, концентрическій съ C_i и лежащій внутри его, такой, что если возьмемъ точку z внутри его, то точки $z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ будутъ находиться соответственно въ кругахъ $C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_{i+k-1}$; положимъ

$$\frac{\Xi[\varphi(z)]}{\Xi(z)} = \lambda_i, \quad \frac{\Xi[\varphi_2(z)]}{\Xi[\varphi(z)]} = \lambda_{i+1}, \dots, \frac{\Xi[\varphi_k(z)]}{\Xi[\varphi_{k-1}(z)]} = \lambda_{i+k-1},$$

а слѣдовательно

$$\frac{\Xi[\varphi_k(z)]}{\Xi(z)} = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1},$$

точно также

$$\frac{\Xi[\varphi_{2k}(z)]}{\Xi[\varphi(z)]} = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1},$$

такъ что

$$\Xi[\varphi_{2k}(z)] = (\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1})^2 \Xi(z)$$

и вообще

$$\Xi[\varphi_{kp}(z)] = (\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1})^p \Xi(z).$$

Слѣдовательно въ случаѣ періодической сходимости $\Xi(z)$ есть рѣшеніе уравненія

$$\Xi[\varphi_k(z)] = C \Xi(z)$$

и общая система рѣшеній будетъ

$$\{ \alpha_i [\mathfrak{B}_i(z)]^n, a^n \}$$

гдѣ α произвольная постоянная и n цѣлое положительное или отрицательное число.

Итакъ, въ кругѣ C_i функція $\Xi(z)$ имѣетъ общее выра-
женіе

$$\alpha_i [\mathfrak{B}_i(z)]^{n_i}.$$

Такъ какъ необходимо, чтобы

$$\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} = a^{n_0} = a^{n_1} = \dots,$$

т. е.

$$n_0 = n_1 = \dots = n,$$

то всѣ точки группы суть корни, или полюсы одной и той же кратности функціи $\Xi(z)$.

Такъ какъ

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{i+1} \left\{ \mathfrak{B}_{i+1}[\varphi(z)] \right\}^n}{\alpha_i [\mathfrak{B}_i(z)]^n}$$

и въ тоже время

$$\mathfrak{B}_{i+1}[\varphi(z)] = \alpha_i \mathfrak{B}_i(z),$$

то λ_i выражается чрезъ α слѣдующимъ образомъ

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \alpha_i^n.$$

§ 5. Самое общее рѣшеніе уравненія Schröder'a получимъ, опредѣляя постоянныя α_i такъ, чтобы λ_i сдѣлались равными. Пусть λ ихъ общее значеніе, такъ что

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \alpha_0^n = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \alpha_1^n = \dots = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_{k-2}} \alpha_{k-2}^n = \frac{\alpha_0}{\alpha_{k-1}} \alpha_{k-1}^n = \lambda;$$

$$\dots \alpha_1 = \alpha_0 \frac{\lambda}{\alpha_0^n}, \alpha_2 = \alpha_0 \frac{\lambda^2}{\alpha_0^n \alpha_1^n}, \dots, \alpha_{k-1} = \alpha_0 \frac{\lambda^{k-1}}{\alpha_0^n \alpha_1^n \dots \alpha_{k-2}^n}$$

и

$$\lambda^k = \alpha_0^n \alpha_1^n \dots \alpha_{k-1}^n = \alpha$$

Положимъ общій множитель $\alpha_0 = 1$; это равносильно умноженію $\Xi(z)$ на постоянную; кромѣ того доложимъ $n=1$;

очевидно, чтобы возвратиться къ случаю произвольнаго n нужно возвысить α и $\mathfrak{B}_i(z)$ въ степень n .

Возьмемъ для λ корень двучленнаго уравненія

$$\lambda^k = \alpha$$

и означимъ $B(z)$ функцію, которая будетъ имѣть значеніе

$$\frac{\lambda_i}{a_0 a_1 \dots a_{i-1}} \mathfrak{B}_i(z)$$

въ кругѣ C_i . Эта функція голоморфна въ каждой точкѣ круговой группы и удовлетворяетъ уравненію

$$B[\varphi(z)] = \lambda B(z)$$

а слѣдовательно есть рѣшеніе уравненія Schröder'a

Функція $B(z)$ можетъ имѣть k значеній, отношеніе которыхъ для каждаго круга C_i постоянно.

Общій видъ голоморфныхъ и мероморфныхъ рѣшеній уравненія Schröder'a будетъ слѣдовательно,

$$\Xi(z) = \alpha_0 [B(z)]^n, \quad C = \lambda^n,$$

гдѣ α_0 произвольная постоянная и n число цѣлое положительное или отрицательное.

Рѣшеніемъ уравненія Abel'я будетъ

$$b(z) = \frac{\log B(z)}{\log \lambda}.$$

§ 6. Если для данной $\varphi(z)$ функція $B(z)$ можетъ быть выражена, то задача итерациі можетъ считаться рѣшенной. Мы видѣли въ главѣ I, что

$$F(p, z) = \Xi_{-1}[C^p \Xi(z)]$$

есть выраженіе p -кратной итерациі; поэтому теперь мы можемъ написать

$$F(p, z) = B_{-1}[\lambda^p B(z)] = \varphi_p(z).$$

Но *Koenigs* ¹⁾ далъ еще другую функцію, дающую непосредственное рѣшеніе уравненія итерациі

$$\Xi_q(z) = \varphi(z)$$

Это уравненіе мы будемъ называть *уравненіемъ Koenigs'a*. Опредѣлимъ функцію, ему удовлетворяющую.

Будемъ искать функцію, имѣющую предѣльную точку x , голоморфную въ этой точкѣ и для которой имѣется функція $B(z)$. Назовемъ такую функцію $Z(z)$. Очевидно для нее имѣеть мѣсто соотношение

$$B[Z(z)] = Z'x B(z).$$

Возьмемъ уравненіе

$$B(Z) = cB(z),$$

гдѣ c произвольная постоянная, и найдемъ изъ функцій, опредѣляемыхъ этимъ уравненіемъ, ту, которая представляетъ рѣшеніе нашей задачи.

Если положимъ въ послѣднемъ уравненіи $z = x$, то получимъ

$$B(Z) = 0;$$

это уравненіе очевидно имѣетъ простой корень $z = x$, потому что $B(x) = 0$ и $B'(x) = 1$.

Слѣдовательно уравненіе $B(Z) = cB(z)$ опредѣляетъ функцію, голоморфную въ x и обращающуюся въ $z = x$ въ этой точкѣ; назовемъ ее $Z(z, c)$.

Продифференцировавъ вышенаписанное уравненіе, получимъ

$$B'(Z) \frac{dZ}{dz} = cB'(z)$$

Пусть $Z = x$ и $z = x$; тогда

¹⁾ Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) II, 1885, p. 385.

$$c = \left[\frac{dZ}{dz} \right]_x = Z'(x, c).$$

Если x есть предѣльная точка функции $Z(z, c)$, то $\text{mod} Z'(x, c) = \text{mod} c < 1$. Следовательно и обратно: тѣ изъ функций $Z(z, c)$ имѣютъ x предѣльной точкой, для которыхъ $\text{mod} c < 1$.

Такъ какъ

$$B[Z(z, c)] = Z'(x, c)B(z)$$

то ясно, что $B(z)$ есть предѣльная функция для $Z(z, c)$; и обратно: функции $Z(z, c)$, для которыхъ $\text{mod} c < 1$, и только эти, имѣютъ предѣльной функцией $B(z)$.

Функция $\varphi(z)$ есть одна изъ функций $Z(z, c)$, а именно

$$\varphi(z) = Z[z, \varphi'(x)].$$

Если въ уравненіи

$$B[Z(z, c)] = cB(z)$$

подставимъ вмѣсто z $Z(z, c')$, то получимъ

$$\begin{aligned} B\{Z[Z(z, c'), c]\} &= cB[Z(z, c')] \\ &= cc'B(z). \end{aligned}$$

Функция $Z[Z(z, c'), c]$ голоморфна въ области x и, по предыдущему,

$$Z[Z(z, c'), c] = Z(z, cc').$$

Если вмѣсто z будемъ подставлять $Z(z, c)$ p разъ, то $Z_p(z, c)$ будетъ голоморфна въ области точки x и мы будемъ имѣть

$$Z_p(z, c) = Z(z, c^p).$$

Полагая здѣсь $p = -1$, получимъ

$$Z_{-1}(z, c) = Z\left(z, \frac{1}{c}\right),$$

т. е. функции

$$Z(z, c) \text{ и } \bar{Z}\left(z, \frac{1}{c}\right)$$

суть функции взаимно обратныя.

§ 7. Кривая равных модулей функции $B(z)$, голоморфной въ области, окружающей ея корень

$$\operatorname{mod} B(z) = \mu = \text{const},$$

представляет замкнутый контуръ O_μ вокругъ простого корня x функции $B(z)$ для весьма малыхъ значений μ .

Найдемъ число M такое, чтобы для $\mu < M$ кривая представляла замкнутый контуръ безъ кратныхъ точекъ, внутри котораго $B(z)$ оставалась бы голоморфной, ея производная $B'(z)$ не обращалась бы въ нуль и сама функция $B(z)$ не имѣла бы корней кромѣ x .

Контуръ O_M будутъ лежать внутри контура O_μ и для всѣхъ точекъ, лежащихъ внѣ O_μ и внутри O_M будемъ имѣть

$$\operatorname{mod} B(z) > \mu,$$

а для всѣхъ точекъ, лежащихъ внутри O_M будетъ

$$\operatorname{mod} B(z) < \mu.$$

Кривыя равныхъ аргументовъ, ортогональныя траекторіи кривыхъ равныхъ модулей, всѣ проходятъ черезъ точку x . Если на вѣтви Ax (черт. 1) одной изъ этихъ кривыхъ аргументъ $B(z)$ равенъ α , то на вѣтви xB онъ будетъ равенъ $\alpha + \pi$. Двѣ вѣтви xA и xA' пересекаются въ x подъ угломъ $\alpha - \beta$, если аргументъ, соотвѣствующій xA есть α , а соотвѣствующій xA' есть β . Два аргумента, различающіеся на 2π , опредѣляютъ одну и ту же вѣтвь. Внутри O_M всякій аргументъ опредѣляетъ единственнымъ образомъ вѣтвь, проходящую чрезъ x .

Докажемъ слѣдующія теоремы:

Теорема I. Уравненіе

$$B(Z) = cB(z)$$

для z взятаго внутри O_M и для $\text{mod } c < 1$ имѣетъ по крайней мѣрѣ одно рѣшеніе внутри O_M .

Пусть

$$c = \rho e^{i\alpha}, \text{ mod } B(z) = \mu, \arg B(z) = \alpha.$$

Для всѣхъ точекъ Z удовлетворяются уравненія

$$\begin{aligned} \text{mod } B(z) &= \rho \mu \\ \arg B(z) &= \alpha + \theta \end{aligned}$$

$O_{\rho\mu}$ лежитъ внутри O_M , такъ какъ $\rho < 1$.

Кривая $\arg B(z) = \alpha + \theta$ пересекаетъ $O_{\rho\mu}$ въ точкѣ Z , которая лежитъ внутри O_M и удовлетворяетъ уравненію

$$B(Z) = cB(z).$$

Теорема II. Функция $Z(z)$, которая изображается только что найденной точкой Z , голоморфна въ контуръ O_M .

Если бы Z была критической точкой, то было бы одновременно

$$\begin{aligned} B(Z) &= cB(z), \\ B'(Z) &= 0, \end{aligned}$$

что невозможно по сдѣланному относительно $B'(z)$ предположенію.

Теорема III. Функция Z единственна и есть ничто иное, какъ функция $Z(z, c)$, определенная выше.

Если бы уравненіе

$$B(Z) = cB(z)$$

имѣло въ O_M , нѣсколько корней, то каждый изъ нихъ былъ бы голоморфенъ въ O_M , что противно теоремѣ II.

Далѣе, для $z = x$ $B(Z) = 0$. Такъ какъ x есть единственный корень $B(z)$ въ O_M , то всѣ эти голоморфныя функціи

имѣли бы въ x одно и тоже значеніе x . Это невозможно, а слѣдовательно Z единственна и есть ничто иное, какъ $Z(z, c)$.

§ 8. Функция Z даетъ непосредственное рѣшеніе уравненія Кoenigs'a

$$\Xi_p(z) = \varphi(z),$$

которое въ свою очередь даетъ отвѣтъ на основной вопросъ итерации.

Положимъ, что $\varphi(z)$ есть одна изъ функций Z (см. § 6) и пусть

$$\varphi(z) = Z(z, c_0),$$

гдѣ c_0 произвольная постоянная, неравная нулю и безконечности.

Соотношеніе

$$Z_p(z, \sqrt[p]{c_0}) = Z(z, c_0) = \varphi(z)$$

показываетъ, что уравненіе Кoenigs'a имѣетъ p голоморфныхъ рѣшеній въ области точки x , предѣльной точки функций $Z(z, c)$, имѣющихъ $\text{mod } c < 1$.

Докажемъ слѣдующую теорему.

Функция $\varphi(z)$ есть одна изъ функций Z , если уравненіе

$$z = \varphi(z)$$

имѣетъ такой корень x , что

$$\text{mod } \varphi'(x) \neq 1 \text{ и } \neq 0.$$

Положимъ сначала, что

$$\text{mod } \varphi'(x) < 1.$$

Точка x въ этомъ случаѣ есть предѣльная точка функции $\varphi(z)$. Слѣдовательно мы можемъ найти функции $B(z)$ и $Z(z, c)$ и

$$\varphi(z) = Z[z, \varphi'(x)].$$

Если

$$\text{mod } \varphi'(x) > 1,$$

то

$$\text{mod} \varphi'_{-1}(x) = \frac{1}{\text{mod} \varphi'(x)} < 1,$$

причем φ_{-1} голоморфна въ точкѣ x и имѣетъ x предѣльной точкой.

Слѣдовательно

$$\varphi_{-1}(z) = Z[z, \varphi'_{-1}(x)] = Z\left[z, \frac{1}{\varphi'(x)}\right],$$

а такъ какъ $Z(z, c)$ и $Z(z, \frac{1}{c})$ суть функціи взаимно обратныя, то и въ этомъ случаѣ

$$\varphi(z) = Z[z, \varphi'(x)]$$

Отсюда такое

Слѣдствіе: Если x есть корень уравненія

$$z = \varphi(z)$$

и если $\text{mod} \varphi'(x)$ не равенъ ни единицѣ, ни нулю, то уравненіе Koenigs'a

$$\Xi_p(z) = \varphi(z)$$

имѣетъ p голоморфныхъ рѣшеній въ области точки x ; если $\varphi_{\frac{1}{p}}(z)$ есть одно изъ такихъ рѣшеній, то

$$\varphi_{\frac{1}{p}}(z) = Z\left[z, \sqrt[p]{\varphi'(x)}\right].$$

Такъ какъ значенія индексъ итерациі могутъ быть какія угодно вещественныя (гл. I), то вообще

$$\varphi_n(z) = Z[z, [\varphi'(x)]^n]$$

—выраженіе n —кратной итерациі функціи $\varphi(z)$, представляющее, вообще говоря, безконечное число функцій, голоморфныхъ въ области точки x .

Примѣръ. Пусть

$$\varphi(z) = \sqrt{\alpha z^2 + \beta}.$$

Предѣльная точка опредѣлится изъ уравненія

$$z = \sqrt{\alpha z^2 + \beta} \therefore x^2 = \frac{\beta}{1-\alpha};$$

слѣдовательно

$$\varphi(z) = \sqrt{x^2 + \alpha(z^2 - x^2)}$$

или

$$[\varphi(z)]^2 - x^2 = \alpha(z^2 - x^2)$$

Точки $\pm x$ будутъ предѣльными, если $\text{mod } \alpha < 1$. Въ этомъ случаѣ $B(z) = z^2 - x^2$. Функция Z опредѣляется изъ уравненія

$$Z^2 - x^2 = c(z^2 - x^2)$$

и интеграломъ уравненія Кoenigs'а

$$\Xi_p(z) = \sqrt{\alpha z^2 + \beta}$$

будетъ

$$\Xi(z) = \sqrt{\alpha^{\frac{1}{p}} z^2 + \frac{\beta}{1-\alpha} (1 - \alpha^{\frac{1}{p}})},$$

такъ что

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\alpha^n z^2 + \frac{\beta}{1-\alpha} (1 - \alpha^n)}.$$

Глава IV.

§ I. Къ изложеннымъ выше способамъ нахожденія $\varphi_n(z)$ по данной $\varphi(z)$ необходимо присоединить еще способъ, данный проф. Коркиным¹⁾.

Пусть $\varphi(z)$ есть функція, голоморфная въ области точки α . Если α есть корень уравненія

$$z = \varphi(z)$$

и если $\text{mod} \varphi'(\alpha) < 1$, то и $\varphi_y(z)$ будетъ голоморфна въ той же области.

Замѣтивъ это, разложимъ $\varphi(z)$ въ строку по степенямъ $z - \alpha$; получимъ

$$\varphi(z) = \alpha + A_0(z - \alpha) + A_1(z - \alpha)^2 + A_2(z - \alpha)^3 + \dots$$

Разложимъ теперь въ строку $\varphi_y(z)$; такъ какъ $\varphi_y(\alpha) = \alpha$, то это разложенеіе будетъ имѣть видъ

$$\varphi_y(z) = \alpha + \alpha_0(z - \alpha) + \alpha_1(z - \alpha)^2 + \alpha_2(z - \alpha)^3 + \dots,$$

гдѣ коэффициенты

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

суть неизвѣстныя пока функціи y . Для $y = 0$ получимъ

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0;$$

для $y = 1$

$$\alpha_0 = A_0, \alpha_1 = A_1, \alpha_2 = A_2, \dots$$

¹⁾ Korkine. Sur un problème d'interpolation. Bull. des Sc. Math., (2) T. VI, 1882, p. 228.

Наша задача состоитъ въ опредѣленіи $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ въ функціи y и коэффициентовъ разложенія $\varphi(z)$.

Мы видѣли выше (Гл. I) что отношеніе частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial y} : \frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial z}$$

не зависитъ отъ y и есть функція одного z . Означимъ эту функцію чрезъ $\lambda(z)$, такъ что

$$\frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial z} \cdot \lambda(z)$$

Разложение $\lambda(z)$ въ строку будетъ имѣть видъ

$$\lambda(z) = \beta_0(z-\alpha) + \beta_1(z-\alpha)^2 + \beta_2(z-\alpha)^3 + \dots,$$

такъ что предыдущее уравненіе даетъ тождественно

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} (z-\alpha) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (z-\alpha)^2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} (z-\alpha)^3 + \dots \\ &= [\alpha_0 + 2\alpha_1(z-\alpha) + 3\alpha_2(z-\alpha)^2 + \dots][\beta_0(z-\alpha) + \\ & \quad + \beta_1(z-\alpha)^2 + \beta_2(z-\alpha)^3 + \dots]. \end{aligned}$$

Если сравнимъ коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ $z-\alpha$ въ этомъ тождествѣ, то получимъ

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y} = \beta_0 \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 2\beta_0 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_0, \dots$$

Интегрируя первое уравненіе, находимъ

$$\alpha_0 = C e^{y \beta_0}$$

гдѣ C постоянная. Такъ какъ для $y=0$ $\alpha_0=1$ и для $y=1$ $\alpha_0=A_1$, то

$$C=1, \quad \beta_0 = \lg A_0, \quad \alpha_0 = A_0^y.$$

Точно также изъ второго уравненія найдемъ.

$$\alpha_1 = A_1 A_0^{y-1} \frac{A_0^y - 1}{A_0 - 1};$$

и т. д.

§ 2. Можно иначе, болѣе непосредственно получить значенія коэффициентовъ разложенія функціи $\varphi_y(z)$.

Напишемъ тождество

$$\varphi_y \varphi(z) - \alpha = \varphi \varphi_y(z) - \alpha$$

и возьмемъ разложенія

$$\varphi_y \varphi(z) - \alpha = \alpha_0(\varphi(z) - \alpha) + \alpha_1(\varphi(z) - \alpha)^2 + \alpha_2(\varphi(z) - \alpha)^3 + \dots$$

$$\varphi \varphi_y(z) - \alpha = A_0(\varphi_y(z) - \alpha) + A_1(\varphi_y(z) - \alpha)^2 + A_2(\varphi_y(z) - \alpha)^3 + \dots;$$

но, если положимъ для краткости $z - \alpha = \zeta$

$$\varphi(z) - \alpha = A_0 \zeta + A_1 \zeta^2 + A_2 \zeta^3 + \dots$$

$$\varphi_y(z) - \alpha = \alpha_0 \zeta + \alpha_1 \zeta^2 + \alpha_2 \zeta^3 + \dots,$$

такъ что

$$\begin{aligned} \varphi_y \varphi(z) - \alpha &= \alpha_0(A_0 \zeta + A_1 \zeta^2 + A_2 \zeta^3 + \dots) \\ &\quad + \alpha_1(A_0 \zeta + A_1 \zeta^2 + A_2 \zeta^3 + \dots)^2 \\ &\quad + \alpha_2(A_0 \zeta + A_1 \zeta^2 + A_2 \zeta^3 + \dots)^3 + \dots, \\ \varphi \varphi_y(z) - \alpha &= A_0(\alpha_0 \zeta + \alpha_1 \zeta^2 + \alpha_2 \zeta^3 + \dots) \\ &\quad + A_1(\alpha_0 \zeta + \alpha_1 \zeta^2 + \alpha_2 \zeta^3 + \dots)^2 \\ &\quad + A_2(\alpha_0 \zeta + \alpha_1 \zeta^2 + \alpha_2 \zeta^3 + \dots)^3 + \dots. \end{aligned}$$

Въ силу написаннаго нами тождества эти два разложенія равны между собой. Сравнивая коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ ζ мы получимъ уравненія, изъ которыхъ опредѣлимъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, зная что $\alpha_0 = A_0$.

Эти уравненія будутъ:

$$\begin{aligned} A_1 \alpha_0 + A_0^2 \alpha_1 &= A_0 \alpha_1 + A_1 \alpha_0^2, \\ A_2 \alpha_0 + 2 A_0 A_1 \alpha_1 + A_0^3 \alpha_2 &= A_0 \alpha_2 + 2 A_1 \alpha_0 \alpha_1 + A_2 \alpha_0^3, \\ A_3 \alpha_0 + (2 A_0 A_2 + A_1^2) \alpha_1 + 3 A_0^2 A_1 \alpha_2 + A_0^4 \alpha_3 \\ &= A_0 \alpha_3 + A_1 (2 \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1^2) + 3 A_2 \alpha_0^2 \alpha_1 + A_3 \alpha_0^4, \end{aligned}$$

$$A_4\alpha_0 + 2(A_0A_3 + A_1A_2)\alpha_1 + 3(A_0^2A_2 + A_0A_1^2)\alpha_2 + 4A_0^3A_1\alpha_3 + \\ + A_0^4\alpha_4 \\ = A_0\alpha_4 + 2A_1(\alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2) + 3A_2(\alpha_0^2\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1^2) + 4A_3\alpha_0^3\alpha_1 + \\ + A_4\alpha_0^5,$$

и т. д.

Подставивъ въ эти уравненія $\alpha_0 = A_0^y$, найдемъ

$$\alpha_1 = A_1 A_0^{y-1} \frac{A_0^y - 1}{A_0 - 1},$$

$$\alpha_2 = 2A_1^2 A_0^{y-1} \frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)}{(A_0^2 - 1)(A_0 - 1)} + A_2 A_0^{y-1} \frac{A_0^{2y} - 1}{A_0^2 - 1}$$

$$\alpha_3 = A_1^3 A_0^{y-2} \frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)[(A_0 + 5)A_0^y - 5A_0^2 - 1]}{(A_0 - 1)(A_0^2 - 1)(A_0^3 - 1)}$$

$$+ A_1 A_2 A_0^{y-1} \frac{(A_0^y - 1)(A_0^{y-1} - 1)[(3A_0 + 5)A_0^y + 5A_0 + 2]}{(A_0^2 - 1)(A_0^3 - 1)}$$

$$+ A_3 A_0^{y-1} \frac{A_0^{3y} - 1}{A_0^3 - 1},$$

и т. д.

Вышенаписанныя уравненія позволяютъ также опредѣ-
лить $\beta_1, \beta_2, \dots$, — коэффициенты разложенія функціи $\lambda(z)$
Производная

$$\frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial y} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} (z - \alpha) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (z - \alpha)^2 + \dots$$

для $y=0$ обращается въ $\lambda(x)$, а слѣдовательно производныя

$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}, \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}, \dots$ для $y=0$ суть соотвѣтственно $\beta_0, \beta_1, \dots$

Поэтому продифференцировавъ вышеупомянутыя урав-
ненія по y и сдѣлавъ $y=0$ получимъ

$$A_1\beta_0 + A_0^2\beta_1 = A_0\beta_1 + 2A_1\beta_0,$$

$$A_2\beta_0 + 2A_0A_1\beta_1 + A_0^3\beta_2 = A_0\beta_2 + 2A_1\beta_1 + 3A_2\beta_0$$

$$A_3\beta_0 + (2A_0A_2 + A_1^2)\beta_1 + 3A_0^2A_1\beta_2 + A_0^4\beta_3$$

$$= A_0\beta_3 + 2A_1\beta_2 + 3A_2\beta_1 + 4A_3\beta_0,$$

и т. д.

Изъ этихъ уравненій опредѣлимъ $\beta_1, \beta_2, \dots$, замѣчая, что $\beta_0 = \lg A_0$; такъ

$$\beta_1 = \frac{A_1}{A_0(A_0-1)} \lg A_0$$

$$\beta_2 = \frac{2(A_0 A_2 - A_1^2)}{A_0^2(A_0-1)(A_0+1)} \lg A_0$$

$$\beta_3 = \frac{3A_0^2(A_0+1)A_3 - (8A_0+7)A_0A_1A_2 + (5A_0+4)A_1^3}{A_0^3(A_0^2-1)(A_0+1)} \lg A_0$$

и т. д.

Изъ разложенія проф. Коркина получаются, какъ частные случаи, разложенія *Collins'a* ¹⁾, *Schröder'a* ²⁾ и *Cayley* ³⁾ если положимъ

$$\alpha=0 \quad \text{и} \quad A_0=1$$

¹⁾ Nouvelles recherches sur la théorie des puissances fonctionnelles, 1827

²⁾ Über iterirte Functionen. Math. Ann. B. III, 1871, p. 310.

³⁾ Quarterly Journal. B. III, p. 366.

Глава V.

§ 1. Займемся теперь геометрическимъ опредѣленіемъ предѣльныхъ точекъ итерациі ¹⁾.

Извѣстно, что если мы имѣемъ уравненіе

$$F(x)=0,$$

то геометрически корни его могутъ быть опредѣлены слѣдующимъ образомъ. Представимъ данное уравненіе подъ видомъ

$$f(x)=g(x),$$

перенеся нѣкоторое число членовъ его, содержащихъ x въ правую часть. Пусть

$$y=f(x) \text{ и } y=g(x)$$

—кривыя AB и $A'B'$ (черт. 2). Точки ихъ пересѣченія $F_1, P_2, \dots$ пусть имѣютъ абсциссы $OQ_1=\alpha_1, OQ_2=\alpha_2, \dots$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ будутъ корнями уравненія $F(x)=0$.

Чтобы примѣнить этотъ способъ къ нахожденію предѣльныхъ точекъ итерациі, которыя будутъ корнями уравненія

$$x=\varphi(x),$$

мы строимъ кривую

$$y=\varphi(x)$$

¹⁾ *Lémeray*. Sur les conditions de convergence de certains développements ver les racines des équations. Ass. Fr. 1894.

— Sur les fonctions iteratives. Ass. Fr. 1895.

— Sur la convergence des Substitutions uniformes. Nouv. Ann. 1897.

Isenkrahe, Das Verfahren der Functionswiederholung., Lp. 1897.

и прямую

$$y=x;$$

абсциссы точек пересѣченія этихъ линій дадутъ намъ значенія корней уравненія $x=\varphi(x)$. Корень α_i будетъ предѣльной точкой итерациі функціи $\varphi(x)$, если

$$|\varphi'(\alpha_i)| < 1.$$

Но $\varphi'(\alpha_i)$ есть *tang.* угла касательной съ осью x въ точкѣ (α_i, α_i) ; слѣдовательно итерациія будетъ сходящеюся въ томъ случаѣ, когда кривая лежитъ, близъ точки пересѣченія съ прямой $y=x$ въ углахъ MPN и QPO (черт. 3), образованныхъ прямой $y=x$ и перпендикуляромъ къ ней, проведеннымъ чрезъ точку (α_i, α_i) .

§ 2. Производя итерацию функціи $y=\varphi(x)$ мы поступаемъ слѣдующимъ образомъ: даемъ x определенное значеніе x_1 ; для этого значенія $y=y_1$; дѣлаемъ $y_1=x_2$; тогда $\varphi(x_2)=y_2$, и т. д. Не трудно видѣть, что такая подстановка изобразится ломаной $P_1Q_1P_2Q_2\dots$ (черт. 4 а, б);¹ въ самомъ дѣлѣ, давая x значеніе x_1 и находя y_1 мы определяемъ на кривой точку P_1 ; подставляя y_1 вмѣсто x_1 , т. е. полагая $y_1=x_2$, мы переходимъ отъ точки кривой къ точкѣ прямой $y=x$; пусть эта точка будетъ Q_1 ; на кривой ей соотвѣтствуетъ точка P_2 съ координатами $(x_2, y_2=\varphi(x_2))$; и т. д.

Пусть ¹⁾ α одинъ изъ корней уравненія $x=\varphi(x)$ и пусть

$$|\varphi'(\alpha)| < 1.$$

Дадимъ x начальное значеніе x_1 такое, чтобы

$$|\varphi'(x_1)| < 1;$$

тогда

$$\alpha = x_1 + \delta_1 = x_2 + \delta_2,$$

гдѣ δ_1 и δ_2 величины достаточно малыя и $|\delta_2| < |\delta_1|$, а слѣдовательно x_2 ближе къ α , чѣмъ x_1 . Имѣемъ

¹ Netto. Vorlesungen über Algebra. B. I, 1896, p. 302.

$$\alpha - \delta_2 = \varphi(\alpha - \delta_1) = \varphi(\alpha) - \delta_1 \varphi'(\alpha - \theta \delta_1) \\ \therefore \delta_2 = \delta_1 \varphi'(\alpha - \theta \delta_1),$$

гдѣ θ —правильная дробь.

Если $\varphi'(\alpha)$ положительна, то δ_1 и δ_2 имѣютъ одинаковыя знаки и мы будемъ при итерациі приближаться къ α съ одной лишь стороны, такъ что всѣ x_i будутъ больше, или меньше α .

Если же $\varphi'(\alpha)$ отрицательна, то δ_1 и δ_2 имѣютъ разные знаки и мы будемъ съ двухъ сторонъ приближаться α , такъ что $x_1, x_2, \dots$ будутъ попеременно то больше, то меньше α .

Геометрически, въ случаѣ $\varphi'(\alpha)$ положительной, мы будемъ приближаться точкѣ пересѣченія R (черт. 5) кривой $y = \varphi(x)$ и прямой $y = x$ по ломаной $P_1 Q_1 P_2 Q_2 \dots$ если начальное значеніе ближе къ O , чѣмъ α . или по ломаной $F_1 Q'_1 P_1 Q'_2 \dots$ если α ближе къ O , чѣмъ начальное значеніе.

Въ случаѣ $\varphi'(\alpha)$ отрицательной. ломаная $P_1 Q_1 P_2 Q_2 \dots$ (черт. 6) будетъ обходить кругомъ точку R ; въ этомъ случаѣ возьмемъ ли мы начальное значеніе ближе къ O , чѣмъ α , или дальше, ломаная въ одномъ и томъ же направленіи будетъ огигать точку R ; въ первомъ случаѣ это будетъ $P_1 Q_1 P_2 Q_2 \dots$, а во второмъ $KLP_1 Q_1 P_2 Q_2 \dots$,

Формула

$$\delta_2 = \delta_1 \varphi'(\alpha - \theta \delta_1)$$

показываетъ, что чѣмъ меньше $|\varphi'(\alpha)|$, тѣмъ быстрее будетъ сходиться итерациа. На черт. 7 кривая $A'B'$ имѣетъ большій tg угла наклоненія касательной въ точкѣ k къ оси x , чѣмъ кривая AB ; при одинаковомъ начальномъ значеніи x , ломаная между x_1 и k для кривой $A'B'$ состоитъ изъ шести отрезковъ, между тѣмъ какъ ломаная для кривой AB между тѣми же точками состоитъ только изъ двухъ.

Самую быструю сходимость будемъ имѣть, очевидно, если $\varphi'(\alpha) = 0$. Если вообще

$$\varphi'(\alpha)=0, \varphi''(\alpha)=0, \dots \varphi^{(\lambda-1)}(\alpha)=0, \varphi^{(\lambda)}(\alpha) \neq 0,$$

то

$$\delta_2 = \frac{\delta_1^{\lambda}}{\lambda!} \varphi^{(\lambda)}(\alpha - \theta \delta_1).$$

Возможные здѣсь случаи достаточно ясны изъ чертежей 8, 9, 10, 11.

§ 3. Въ § 2 главы II мы оставили безъ разсмотрѣнія случай

$$|\varphi'(\alpha)|=1$$

являющійся сомнительнымъ для сходимости итерациі. Займемся теперь его изслѣдованіемъ.

Пусть

$$\alpha - \delta_2 = \varphi(\alpha - \delta_1) = \varphi(\alpha) - \delta_1 \varphi'(\alpha) + \frac{\delta_1^2}{2} \varphi''(\alpha - \theta \delta_1)$$

$$\dots \delta_2 = \delta_1 \varphi'(\alpha) - \frac{\delta_1^2}{2} \varphi''(\alpha - \theta \delta_1).$$

Пусть сначала

$$\varphi'(\alpha) = +1;$$

тогда

$$\delta_2 = \delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2} \varphi''(\alpha - \theta \delta_1) = \delta_1 \left(1 - \frac{\delta_1}{2} \varphi''(\alpha - \theta \delta_1) \right)$$

Итерација будетъ сходящеюся, если количество

$$1 - \frac{\delta_1}{2} \varphi''(\alpha - \theta \delta_1)$$

меньше единицы. Это можетъ быть, если одновременно

δ_1 положительно и $\varphi''(\alpha)$ положительна

или δ_1 отрицательно и $\varphi''(\alpha)$ отрицательна

Въ обоихъ случаяхъ будемъ приближаться къ корню съ одной стороны.

Если

$$\varphi'(\alpha) = -1,$$

то

$$\delta_2 = -\delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2} \varphi''(\alpha - \theta \delta_1);$$

въ этомъ случаѣ предыдущія разсужденія непримѣнимы, ибо можетъ быть

$$|\delta_1| > |\delta_2|, \text{ но } |\delta_2| < |\delta_3|.$$

Поэтому беремъ

$$\delta_2 = -\delta_1 - \frac{1}{2} \delta_1^2 \varphi''(\alpha) + \frac{1}{6} \delta_1^3 \varphi'''(\alpha) - \dots,$$

$$\delta_3 = -\delta_2 - \frac{1}{2} \delta_2^2 \varphi''(\alpha) + \frac{1}{6} \delta_2^3 \varphi'''(\alpha) - \dots$$

и исключаемъ отсюда δ_2 ; получимъ

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \delta_1 - \frac{1}{6} \delta_1^3 [3(\varphi''(\alpha))^2 + 2\varphi'''(\alpha)] + \dots \\ &= \delta_1 \left\{ 1 - \frac{1}{6} \delta_1^2 [3(\varphi'(\alpha))^2 + 2\varphi'''(\alpha)] \right\} + \dots; \end{aligned}$$

отсюда слѣдуетъ, что *итерація въ случаѣ $\varphi'(\alpha) = 1$ будетъ сходящеюся, если количество*

$$[3(\varphi''(\alpha))^2 + 2\varphi'''(\alpha)]$$

положительно

Чертежи 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 изображаютъ случаи, возможные при $|\varphi'(\alpha)| = 1$.

Если, при $\varphi'(\alpha) = -1$, количество $3[\varphi''(\alpha)]^2 + 2\varphi'''(\alpha)$ равно нулю, то итерация не будетъ ни сходящейся, ни расходящейся, но мы будемъ получать постоянно чередующіяся значенію x_1 и $\varphi(x_1)$. Дѣйствительно, изъ формулы

$$\delta_3 = \delta_1 - \frac{1}{6} \delta_1^3 [3(\varphi''(\alpha))^2 + 2\varphi'''(\alpha)] + \dots$$

при

$$3(\varphi''(\alpha))^2 + 2\varphi'''(\alpha) = 0$$

слѣдуетъ

$$\delta_3 = \delta_1,$$

а такъ какъ

$$\alpha = x_1 + \delta_1 = x_2 + \delta_2 = x_3 + \delta_3 = \dots,$$

то

$$x_1 = x_3 = x_5 = \dots$$

и

$$x_2 = x_4 = x_6 = \dots$$

при всякомъ начальномъ значеніи x_1 .

Въ этомъ случаѣ, какъ не трудно видѣть, кривая $y = \varphi(x)$ симметрична относительно прямой $y = x$ какъ оси (черт. 21).

Подобный же случай, но лишь для одного или нѣсколькихъ *опредѣленныхъ* начальныхъ значеній x можетъ имѣть мѣсто и для всякой функціи $\varphi(x)$. Дѣйствительно, достаточно опредѣлить ξ и η изъ уравненій

$$\varphi(\xi) = \eta$$

$$\varphi(\eta) = \xi$$

и начать итерацію, давая x значеніе ξ или η , чтобы получать непремѣнно тѣ же величины η или ξ . Конечно отъ вида функціи φ зависятъ, будутъ ли ξ и η вещественны, конечны, комплексны или бесконечно велики.

Ходъ итераціи въ рассмотрѣнномъ случаѣ показанъ на чертежахъ 22 и 23.

Глава VI.

§ 1. Изъ теоріи предѣльныхъ точекъ итерациі непосредственно слѣдуетъ возможности примѣненія итерациі къ вычисленію корней уравненій.

Всякое уравненіе съ одной неизвѣстной, алгебраическое или трансцендентное, можетъ быть приведено къ виду

$$z = \varphi(z). \quad (1)$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$F(x) + \Phi(x) + \Psi(x) + \dots = 0 \quad (2)$$

есть уравненіе въ которомъ $F, \Phi, \Psi, \dots$ суть знаки какихъ угодно сложныхъ функцій.

Положимъ

$$F(x) = z. \quad x = F_{-1}(z);$$

тогда (2) обратится въ

$$z + \Phi F_{-1}(z) + \Psi F_{-1}(z) + \dots = 0;$$

полагая

$$\Phi F_{-1}(z) + \Psi F_{-1}(z) + \dots = -\varphi(z)$$

получимъ

$$z = \varphi(z),$$

т. е. уравненіе (1): Зная корни (1), можемъ найти корни (2).

Къ типу уравненій (1) не принадлежатъ уравненія вида

$$\psi\xi \dots \chi(x) = c;$$

но для нихъ непосредственно

$$x = \chi_{-1} \dots \xi_{-1} \psi_{-1}(c).$$

§ 2. Теорема. Если уравнение

$$x = \varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть функция голоморфная въ кругѣ C_α конечнаго радіуса съ центромъ въ α , имѣетъ корень α , то этотъ корень можетъ быть вычисленъ съ какой угодно точностью 1) посредствомъ итерациіи функции $\varphi(x)$, если $\text{mod} \varphi'(\alpha) < 1$, и 2) посредствомъ итерациіи $\varphi_{-1}(x)$, если $\text{mod} \varphi'(\alpha) > 1$.

1) слѣдуетъ изъ обратной теоремы главы II § 2, а 2) мы встрѣтили при доказательствѣ теоремы § 8 главы III, гдѣ было найдено, что если

$$\text{mod} \varphi'(\alpha) > 1,$$

то

$$\text{mod} \varphi'_{-1}(\alpha) < 1,$$

а слѣдовательно итерациа функции $\varphi_{-1}(x)$ сходится въ предѣльной точкѣ α .

Геометрическое толкованіе можетъ быть примѣнено къ случаю $|\varphi'(\alpha)| > 1$ слѣдующимъ образомъ.

Пусть AB (черт. 24) есть кривая, уравненіе которой $y = \varphi(x)$; тогда кривая $A'B'$ симметричная кривой AB относительно прямой $y = x$ какъ оси, будетъ имѣть уравненіе $x = \varphi(y)$, или $y = \alpha_{-1}(x)$. Кривая $A'B'$ пересѣкаетъ ось симметріи въ тѣхъ же точкахъ, въ которыхъ ее пересѣкаетъ AB .

Если касательная къ кривой AB въ точкѣ R_1 образуетъ уголъ θ съ осью x , то касательная къ кривой $A'B'$ въ той же точкѣ k_1 образуетъ уголъ θ съ осью y , а слѣдовательно уголъ $\frac{\pi}{2} - \theta$ съ осью x . Если $\text{tg} \theta > 1$, то $\text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \text{ctg} \theta < 1$ и наоборотъ

Слѣдовательно, если рядъ отрѣзковъ для кривой AB бу-

дети расходящимся, то для кривой $A'B'$ онъ будетъ сходящимся, и наоборотъ.

Можно также и пользуясь кривой AB приближаться къ точкѣ R_1 ; для этого нужно лишь начать рядъ отрѣзковъ отъ точки, лежащей на оси y , а не на оси x . Аналитически же очевидно безразлично, будемъ ли мы производить итерацию $\varphi_{-1}(x)$, или въ уравненіи $y=\varphi(x)$ дадимъ y значеніе y_1 и вычислимъ $x=\varphi_{-1}(y_1)$, и т. д.

§ 3. Пусть имѣемъ уравненіе

$$x=\varphi(x);$$

дадимъ x два значенія a и b .

Если

$$a > \varphi(a), \quad b < \varphi(b),$$

или

$$a > \varphi(a), \quad b > \varphi(b),$$

то уравненіе $x=\varphi(x)$ имѣетъ между a и b одинъ, или вообще нечетное число корней, предполагая, что между этими корнями нѣтъ такого корня γ , что $\varphi'(\gamma)=1$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть AB (черт. 25) есть кривая, уравненіе которой $y=\varphi(x)$. На нашемъ чертежѣ эта кривая три раза пересѣкаетъ прямую $y=x$, т. е. переходитъ два раза изъ угла MOY , въ которомъ $x \leq y$, въ уголъ MOX , въ которомъ $x > y$, и одинъ разъ изъ угла MOX въ уголъ MOY . Очевидно, что если до перваго перехода $a < \varphi(a)$, то послѣ третьяго $b > \varphi(b)$ и наоборотъ.

Если одновременно $a > \varphi(a)$ и $b > \varphi(b)$, или $a < \varphi(a)$ и $b < \varphi(b)$, то мы не можемъ сказать, заключается между a и b два корня (или вообще четное число ихъ) или ни одного.

Въ этомъ случаѣ можно примѣнять слѣдующій способъ. Пусть $a < \varphi(a)$, $b < \varphi(b)$, $a < b$ (черт. 26). Если уравненіе $x=\varphi(x)$ имѣетъ между a и b два дѣйствительныхъ корня, т. е. если прямая $x=y$ пересѣкаетъ кривую $y=\varphi(x)$ въ двухъ

точках R_1 и R_2 , то всегда прямая $y=b$ будет пересѣкать кривую AB , а прямая $y=a$ можетъ и не пересѣкать эту кривую. Если же (черт. 27) уравненіе $x=\varphi(x)$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней между a и b , т. е. кривая AB не пересѣкаетъ прямую OM , то, при достаточно близкихъ a и b , ни прямая $y=b$, ни прямая $y=a$ не встрѣтятся между a и b кривой AB .

Тоже самое будетъ имѣть мѣсто и при $a > \varphi(a)$, $b > \varphi(b)$.

Слѣдовательно если имѣемъ уравненіе $x=\varphi(x)$ и если желаемъ узнать, имѣетъ ли оно корни между a и b , причемъ $a \geq \varphi(a)$, $b \geq \varphi(b)$, то дѣлаемъ $\varphi(x_1)=a \therefore x_1=\varphi_{-1}(a)$, $\varphi(x_2)=b$, $\therefore x_2=\varphi_{-1}(b)$; если x_1 или x_2 имѣютъ дѣйствительныя значенія, то уравненіе $x=\varphi(x)$ можетъ имѣть два корня между a и b ; если же какъ x_1 , такъ и x_2 не имѣютъ дѣйствительнаго значенія, то корней между a и b нѣтъ.

Если между a и b четное число корней, то мы сближаемъ a и b до тѣхъ поръ, пока не будетъ

$$a > \varphi(a), \quad b < \varphi(b)$$

или

$$a < \varphi(a), \quad b > \varphi(b),$$

слѣдовательно пока не будетъ между a и b нечетнаго числа корней. Тогда, если $\varphi'(x)$ не мѣняетъ знака между a и b , то, какъ извѣстно (Теорема Ролля) между этими предѣлами лежитъ одинъ дѣйствительный корень. Если же $\varphi'(x)$ мѣняетъ знакъ, то сближаемъ a и b до тѣхъ поръ, пока знакъ $\varphi'(x)$ между ними мѣняться не будетъ. Тогда имѣемъ право утверждать, что одинъ корень уравненія $x=\varphi(x)$ отдѣленъ и находится между a и b , такъ что можно приступить къ вычисленію этого корня.

§ 4. На основаніи вышеизложеннаго рассмотримъ слѣдующіе случаи

$$1) \quad 0 < \varphi'(a) < 1; \quad 0 < \varphi'(b) < 1; \quad a < b.$$

Итерация будет сходящеюся какъ для начальнаго значенія a , такъ и для начальнаго значенія b . Символическое выраженіе для корня α будетъ

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(a) = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(b)$$

$$2) \quad 0 > \varphi'(a) > -1; \quad 0 > \varphi'(b) > 1; \quad a < b$$

и въ этомъ случаѣ

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(a) = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(b)$$

$$3) \quad \varphi'(a) > 1, \quad 0 < \varphi'(b) < 1; \quad a < b$$

Итерация будетъ сходящеюся только для начальнаго значенія b , слѣдовательно

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(b)$$

$$4) \quad 0 < \varphi'(a) < 1, \quad \varphi'(b) > 1; \quad a < b$$

Въ этомъ случаѣ

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(a).$$

$$5) \quad 0 > \varphi'(a) > -1, \quad \varphi'(b) < -1, \quad 3[\varphi''(a)]^2 + 2\varphi'''(a) > 0$$

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(a) = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(b)$$

$$6) \quad \varphi'(a) < 1, \quad 0 > \varphi'(b) > 1, \quad 3[\varphi''(b)]^2 + 2\varphi'''(b) > 0.$$

Тоже, что и въ (5).

Если $|\varphi'(a)| > 1$ и $|\varphi'(b)| > 1$, то мы должны производить итерацию функции $\varphi_{-1}(x)$, чтобы вычислить корень α , заключенный между a и b .

Примѣры.

1. Пусть требуется найти корни уравненія

$$x = \cos x;$$

здѣсь

$$\varphi(x) = \cos x, \quad \varphi'(x) = -\sin x$$

Пусть, согласно, предыдущимъ обозначеніямъ

$$a = \frac{\pi}{6}, \quad b = \frac{\pi}{4};$$

тогда

$$\varphi(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi(b) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Въ этомъ случаѣ

$$a < \varphi(a), \quad b > \varphi(b)$$

и такъ какъ $\varphi'(x) = -\sin x$ не мѣняетъ знака между $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$, то между этими границами заключается одинъ дѣйствительный корень. Такъ какъ $\varphi'(x)$ отрицательна, то приближаться къ нему будемъ съ обѣихъ сторонъ; слѣдовательно искомый корень

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \cos_p \left(\frac{\pi}{6} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \cos_p \left(\frac{\pi}{4} \right).$$

Положимъ

$$x_1 = \frac{\pi}{4}; \quad \text{тогда} \quad \cos x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,70711;$$

дальше находимъ

$$\begin{aligned} x_2 &= 0,70711 \quad \therefore \cos x_2 = \cos 40^\circ 30' 50'' = 0,76025 \\ x_3 &= 0,76025 \quad \therefore \cos x_3 = \cos 43^\circ 33' 32'' = 0,72465 \\ x_4 &= 0,72465 \quad \therefore \cos x_4 = \cos 41^\circ 31' 10'' = 0,74873 \\ x_5 &= 0,74873 \quad \therefore \cos x_5 = \cos 42^\circ 53' 56'' = 0,73257 \\ x_6 &= 0,73257 \quad \therefore \cos x_6 = \cos 41^\circ 58' 23'' = 0,74344 \\ x_7 &= 0,74344 \quad \therefore \cos x_7 = \cos 42^\circ 35' 45'' = 0,73614 \\ x_8 &= 0,73614 \quad \therefore \cos x_8 = \cos 42^\circ 10' 41'' = 0,74106 \\ x_9 &= 0,74106 \quad \therefore \cos x_9 = \cos 42^\circ 27' 32'' = 0,73777 \\ x_{10} &= 0,73777 \quad \therefore \cos x_{10} = \cos 42^\circ 16' 16'' = 0,73996 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 0,73996 \quad \therefore \cos x_{11} = \cos 42^\circ 23' 45'' = 0,73850 \\
 x_{12} &= 0,73850 \quad \therefore \cos x_{12} = \cos 42^\circ 18' 47'' = 0,73947 \\
 x_{13} &= 0,73947 \quad \therefore \cos x_{13} = \cos 42^\circ 22' 5'' = 0,73884 \\
 x_{14} &= 0,73884 \quad \therefore \cos x_{14} = \cos 42^\circ 19' 59'' = 0,73923 \\
 x_{15} &= 0,73923 \quad \therefore \cos x_{15} = \cos 42^\circ 21' 14'' = 0,73901 \\
 x_{16} &= 0,73901 \quad \therefore \cos x_{16} = \cos 42^\circ 20' 31'' = 0,73911 \\
 x_{17} &= 0,73911 \quad \therefore \cos x_{17} = \cos 42^\circ 20' 52'' = 0,73907 \\
 x_{18} &= 0,73907 \quad \therefore \cos x_{18} = \cos 42^\circ 20' 46'' = 0,73909 \\
 x_{19} &= 0,73909 \quad \therefore \cos x_{19} = \cos 42^\circ 20' 48'' = 0,73908.
 \end{aligned}$$

Итакъ, можно принять

$$0,73909 > \alpha > 0,73908.$$

2. Уравненіе

$$x = a^x$$

было рассмотрѣно Эйлеромъ ¹⁾ и Lémeray ²⁾.

Кривая

$$y = a^x$$

имѣетъ видъ, изображенный на чертежѣ 28. При нѣкоторыхъ значеніяхъ a она можетъ пересѣзать прямую $y = x$, при другихъ нѣтъ, т. е. при нѣкоторыхъ значеніяхъ a уравненіе $x = a^x$ имѣетъ дѣйствительные корни, при нѣкоторыхъ не имѣетъ.

Найдемъ наибольшее значеніе, которое можетъ имѣть a при дѣйствительныхъ корняхъ уравненія $x = a^x$. Для этого будемъ искать максимумъ функціи

$$y = x^{\frac{1}{x}}.$$

Взявъ производную, получимъ

$$y' = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} (1 - \lg x);$$

¹⁾ Euler. De formulis exponentialibus. Acta Ac. Pet. 1777. 1, p. 39,

²⁾ Nouv. Ann. 1896 et 1897.

Эта функція обращается въ нуль для

$$x=0, x=e, x=\infty$$

Слѣдовательно наибольшее значеніи a будетъ

$$a=e^{\frac{1}{e}}$$

Для $a=0$ получаемъ $y=0=x$ —самыя оси координатъ: при $a \neq 0$ уравненію $y=a^x$ удовлетворяютъ для всѣхъ значеній a координаты точки $(0, 1)$; слѣдовательно всѣ кривыя проходятъ чрезъ эту точку. При $a=\varepsilon$ —весьма малой величинѣ—кривая идетъ весьма близко къ оси x въ углѣ XOY , поднимается въ томъ же углѣ по оси y до точки $(0, 1)$, пересекаетъ въ этой точкѣ ось y и уходитъ въ безконечность въ углѣ отрицательныхъ x -овъ.

При $a=1-\varepsilon$ кривая весьма близка прямой $y=1$, переходя въ точкѣ $(0, 1)$ съ нижней стороны этой прямой на верхнюю.

При $a=1$ кривая обращается въ прямую $y=1$. При $a=1+\varepsilon$ имѣемъ кривую, симметричную кривой $y=(1-\varepsilon)^x$ относительно прямой $y=1$ какъ оси. При $a>1$ кривая все болѣе и болѣе удаляется отъ прямой $y=1$ по мѣрѣ возрастанія a и приближается къ осямъ координатъ, проходя все время черезъ точку $(0, 1)$.

Прямая $x=1$ пересекаетъ всѣ эти кривыя въ точкахъ, ординаты которыхъ $y=a$.

Для отрицательныхъ a функція a^x перестаетъ быть непрерывной и мы не рассматриваемъ этотъ случай.

Кривая

$$y=a^x$$

при

$$0 < a \leq 1$$

пересекаетъ прямую $y=x$ въ одной точкѣ.

Въ этомъ случаѣ

$$y' = a^x \lg a$$

имѣетъ отрицательную величину и не мѣняетъ знака отъ $x=0$ до $x=1$. При a близкомъ къ единицѣ $|y'| < 1$, при a близкомъ къ нулю $|y'| > 1$. Сомнительный случай сходимости итерациі будемъ имѣть при

$$a = \frac{1}{e^e};$$

въ этомъ случаѣ

$$x = \frac{1}{e}$$

и

$$y' = \varphi'(\alpha) = -1.$$

Слѣдовательно мы должны составить

$$3y''^2 + 2y''';$$

находимъ

$$3y''^2 + 2y''' = e^2 > 0,$$

слѣдовательно если бы мы производили итерацию, она была бы сходящеюся.

При

$$a < \frac{1}{e^e}$$

итерациа функціи a^x будетъ расходящеюся и мы должны для вычисленія корня уравненія $x = a^x$ производить итерацию функціи $\text{Log}_a(x)$.

Въ случаѣ

$$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$$

производная

$$y' = a^x \lg a$$

положительна; для значеній x меньшихъ e всегда $y' < 1$. Въ то же время

$$1 < a^1 \text{ и } e > a^e$$

слѣдовательно между 1 и e заключается одинъ корень, къ которому можно приблизиться итерациейъ функціи a^x . Приближеніе будетъ съ одной стороны.

Не трудно видѣть, что всегда можно найти такое число k , что будетъ

$$k < a^k,$$

а такъ какъ $e > a^e$, то ясно, что между e и k заключается другой корень уравненія $x = a^x$. Для этого корня $y' > 1$, а потому его можно вычислить итерациейъ функціи $\text{Log}_a x$.

3. Уравненіе

$$x = a + b \sin x,$$

гдѣ $b < 1$, извѣстно подъ названіемъ уравненія Кеплера.

Здѣсь

$$\varphi'(x) = b \cos x$$

всегда меньше единицы, слѣдовательно итерация функціи

$$\varphi(x) = a + b \sin x$$

будетъ сходящеюся вся всякомъ начальномъ значеніи x и сколь угодно большомъ a .

$\varphi'(x)$ положительна, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и отрицательна, если $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, и т. д. Слѣдовательно итерация можетъ быть сходящеюся и съ одной и съ двухъ сторонъ.

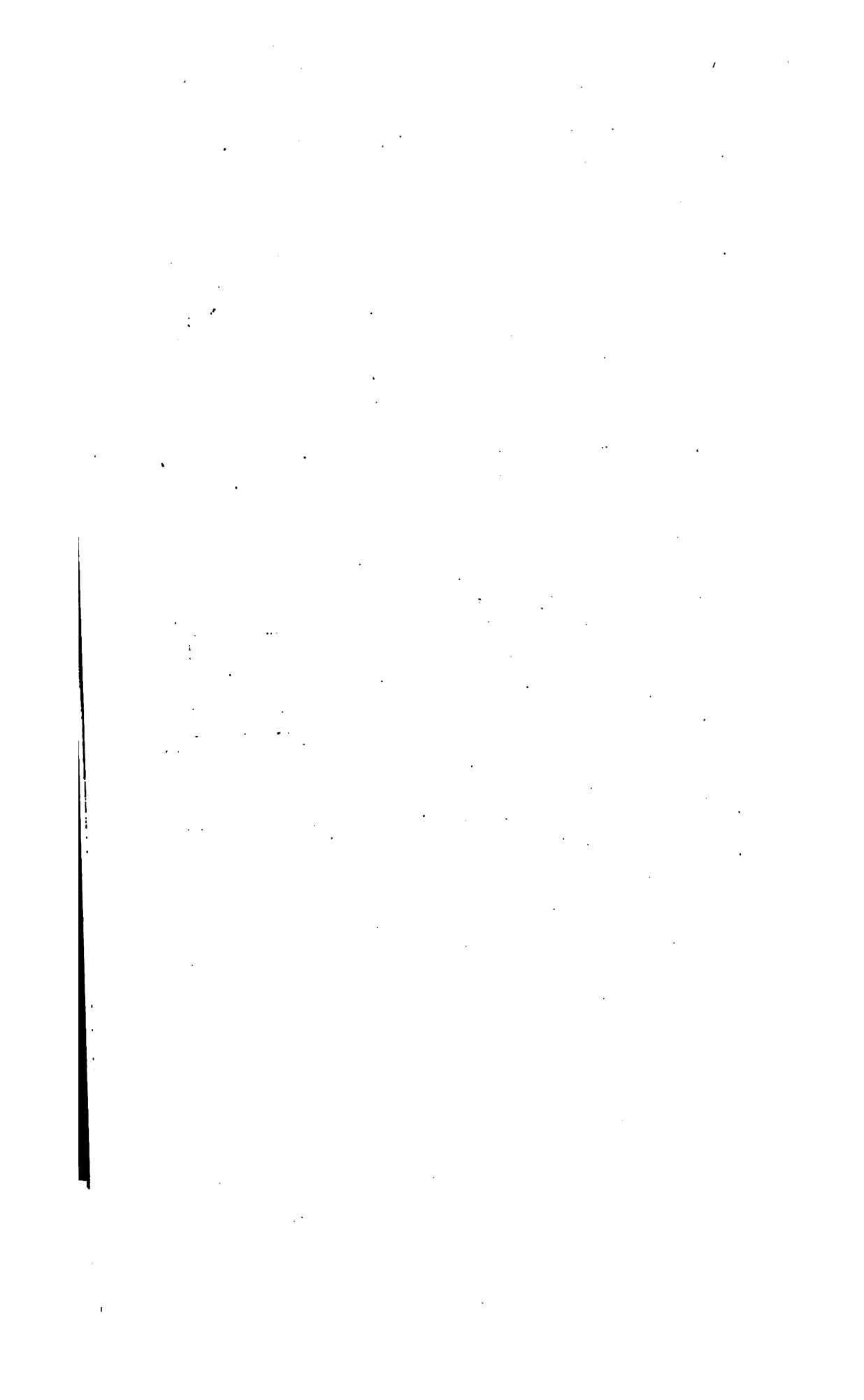
Построимъ кривую

$$y = a + b \sin x$$

предполагая, что $a > 0$ (черт. 29)

Если $a < \pi$, то прямая $x = y$ пересѣчетъ кривую выше прямой $y = a$. Корень находится между 0 и π . Если $a = \pi$, то корень $= a = \pi$.

Если $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, то $\varphi'(x)$ отрицательна и мы будемъ приближаться къ корню съ двухъ сторонъ. Корень въ этомъ



случаѣ лежитъ между $\frac{\pi}{2}$ и π . Если $a = \frac{\pi}{2}$, то корень заключенъ между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} + b$. Если $\frac{\pi}{2} - b < a < \frac{\pi}{2}$, то корень лежитъ между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} + b$. Если $a = \frac{\pi}{2} - b$, то корень $= \frac{\pi}{2}$.

Если $a < \frac{\pi}{2} - b$, то $\varphi'(x)$ для значеніи x близъ корня положительна и корень заключенъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Въ заключеніе сдѣлаемъ замѣчаніе чисто практическаго свойства. Иногда итерация сходится чрезвычайно медленно, что затруднительно для вычисленія. Въ одномъ случаѣ можно ускорить вычисленіе, а именно когда $\varphi'(a)$, гдѣ a корень, отрицательна.

Пусть мы дали x въ функціи $\varphi(x)$ начальное значеніе x_1 , такъ что $\varphi(x_1) = x_2$. если мы подставимъ далѣе въ функцію $\varphi(x)$ не x_2 , а $\frac{x_2 + x_1}{2}$, и будемъ поступать также и далѣе, то итерация значительно ускорится.

Цѣлесообразность такого приѣма очевидна геометрически (Черт. 30)

Въ примѣрѣ 1. намъ пришлось совершить 18 подстановокъ, чтобы до 1" приблизиться къ корню уравненія $x = \cos x$. Примѣняя же это упрощеніе, мы получимъ

$$\xi_1 = \frac{x_2 + x_1}{2} = 42^\circ 2' 11''$$

$$\xi_2 = 42^\circ 17' 45''$$

$$\xi_3 = 42^\circ 20' 16''$$

$$\xi_4 = 42^\circ 20' 42''$$

$$\xi_5 = 42^\circ 20' 47''$$

—тотъ же результатъ при четырехъ подстановкахъ.

И. Аристовъ.

Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques.

(Supplément au traité «Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques»).

Chapitre XLIV.

La sixième méthode pour recevoir toutes les causes principales de l'égalité—les combinaisons alternatives de ses éléments de volume. Les causes des prémisses du syllogisme Barbara.

Ce qui est exposé dans le chapitre précédent nous permet de proposer la méthode suivante pour construire, en forme de déterminations de la classe arbitraire U , toutes les causes principales de chaque problème donnée $1=M$: décomposer l'égalité $1=M$ dans ses éléments de volume, convertir toutes ces éléments en forme de déterminations de U , composer les combinaisons alternatives tout—possibles de ces éléments et transformer chacune de ces alternatives dans une seule égalité.

Exemple. Trouver, en forme de déterminations de a toutes les causes principales des prémisses du syllogisme Barbara, c'est à dire du système:

$$a=ab, b=bc.$$

L' égalité séparée équivalente à ce problème (1) est:

$$\begin{aligned} 0 &= ab_0 + bc_0 = (b+a)(e_0 + c_0) = \\ &= (a+b+c)(a+b+c_0)(a+b_0+c_0)(a_0+b_0+c_0). \end{aligned}$$

Donc les quatre éléments d'extension de ce problème sont:

$$0=a+b+c, \quad 0=a+b+c_0, \quad 0=a+b_0+c_0, \quad 0=a_0+b_0+c_0,$$

ou sous forme des déterminations de a :

$$a=a_0(b+c), \quad a=a_0(b+c_0), \quad a=a_0(b_0+c_0), \quad a=a_0+bc \quad (2)$$

Le nombre total de causes principales doit s'égaliser en ce cas au nombre $2^4=16$. Nous devons trouver toutes les 16 déterminations excessives de a à l'aide de combinaisons alternatives des éléments (2).

La détermination sans éléments d'extension est évidemment $a=a_0$.

Les quatre déterminations avec un seul élément d'extension la chacune sont les éléments mêmes (2).

Les six déterminations avec deux éléments la chacune sont:

$$\begin{aligned} [a=a_0(b+c); a=a_0(b+c_0)] &= [a=a_0(b+c)(b+c_0)] = (a=a_0b), \\ [a=a_0(b+c); a=a_0(b_0+c_0)] &= [a=a_0(bc_0+b_0c)], \\ [a=a_0(b+c); a=a_0+abc] &= [a=abc+a_0(b+c)] = \\ &= [a=bc+a_0(bc_0+b_0c)], \\ [a=a_0(b+c_0); a=a_0(b_0+c_0)] &= (a=a_0c_0), \\ [a=a_0(b+c_0); a=a_0+bc] &= [a=abc+a_0(b+c_0)] = (a=bc+a_0c_0), \\ [a=a_0(b_0+c_0); a=a_0+bc] &= [a=abc+a_0(b_0+c_0)] = (b_0+c_0=0). \end{aligned}$$

Ici les formules 1°, 2° et 4° sont les déterminations de supériorité excessive de a . Les formules 3° et 5° sont les déterminations coéquivalentes de a . La détermination 1° est le résultat d'élimination de c ; la détermination 4° est le résultat

de l'élimination de b ; la détermination 6° est la détermination fictive de a , ou le résultat masqué d'élimination de a .

Les quatre déterminations de a avec trois éléments la chacune, les déterminations qui présentent les causes le plus compliquées du problème, sont:

$$\begin{aligned} [a=a_0(b+c); a=a_0(b+c_0); a=a_0(b_0+c_0)] &= (a=a_0bc_0), \\ [a=a_0(b+c); a=a_0(b+c_0); a=a_0+bc] &= (a=abc+a_0b)= \\ &= (a=bc+a_0bc_0), \\ [a=a_0(b+c_0); a=a_0(b_0+c_0); a=a_0+bc] &= [a=abc+a_0(bc_0+b_0c)], \\ [a=a_0(b+c_0); a=a_0(b_0+c_0); a=a_0+bc] &= (a=abc+a_0c_0). \end{aligned}$$

Ici les formules 3° et 4° sont les déterminations bipartibles, la formule 2° est la détermination coéquivalente, la formule 1° est la détermination excessive détaillée. Quant à la détermination excessive compacte de a , elle coïncide dans ce cas avec l'élément seul $a=a_0+bc$.

Enfin la combinaison alternative de tous les quatre éléments (4) est la détermination complète de a , nommément:

$$\begin{aligned} [a=a_0(b+c); a=a_0(b+c_0); a=a_0(b_0+c_0); a=a_0+bc] &= \\ = [a=abc+a_0(b+c)(b+c_0)(b_0+c_0)] &= (a=abc+a_0bc_0). \end{aligned}$$

Les 16 déterminations précédentes de a nous donnent autant des classes qui sont logiquement égales à a_0 grâce à l'égalité $1=ab_0+bc_0$ opposée au problème donnée (1).

Dans le chapitre XVII nous avons construit les 16 déterminations principales de a qui se déduisent de prémisses du syllogisme Barbara en qualité de leurs conséquences. Ici nous avons encore 16 déterminations principales de a qui se déduisent de mêmes prémisses en qualité de leurs causes.

Chapitre XLV.

La septième méthode pour recevoir toutes les causes principales de l'égalité donnée—lés éliminations des éléments d'extension. Les causes du problème de Venn.

Nous savons que parmi toutes les $2^{\overline{n}-m}$ causes principales de chaque égalité donnée $1=M$ nous n'avons qu'une seule cause qui embrasse tous les 2^n-m éléments d'extension de cette égalité; c'est la cause $U=UM+U_0M_0$ qui est équivalente à cette égalité et présente l'une de ses formes. Toutes les restantes causes principales de la même égalité donnée $1=M$ sont les égalités ayant le nombre des éléments d'extension qui est plus petit que 2^n-m . S'il en est ainsi, toutes les causes principales de l'égalité $1=M$ peuvent être déduites de cette égalité à l'aide des éliminations consécutives de l'un, de deux, de trois etc. éléments d'extension. Cela nous donne encore une méthode pour obtenir toutes les causes principales de chaque égalité donnée $1=M$. L'idée de cette méthode étant évidente il ne nous reste qu'à la revêtir dans la forme praticable.

Supposons que tous les 2^n-m éléments de volume de l'égalité donnée $1=M$ présentés sous forme de déterminations, de la classe U prise arbitrairement sont:

$$\left. \begin{array}{l} U=U_0+p^{(1)}, \quad U=U_0+p^{(2)}, \quad \dots \dots \dots, \quad U=U_0+p^{(i+s-m)} \\ U=U_0q^{(1)}, \quad U=U_0q^{(2)}, \quad \dots \dots \dots, \quad U=U_0q^{(2-i-s)} \end{array} \right\} \quad (1)$$

La décomposition complète de l'égalité donnée $1=M$ sera en ce cas:

$$U=U(p^{(1)}+p^{(2)}+\dots+p^{(i+s-m)})+U_0q^{(1)}q^{(2)}\dots q^{(2-i-s)}. \quad (2)$$

Il est clair que: 1°, pour éliminer dans le problème donné l'élément de la sorte $U=U_0+p^{(k)}$, il suffit de changer dans le schème (2) la classe $p^{(k)}$ en 0 et 2°, pour y éliminer

l'élément du type $U=U_0q^{(1)}$ il suffit de remplacer dans la formule (2) la classe $q^{(1)}$ par l'unité.

Exemple. Trouver, sous forme de déterminations de a , toutes les causes principales du problème de Venn, c'est à dire du système:

$$a=a(bc_0+b_0c), \quad b=ab.$$

L'égalité seule équivalente à ce système est:

$$\begin{aligned} 1 &= (a_0 + bc_0 + b_0c)(a + b_0) = a(bc_0 + b_0c) + a_0b_0 = \\ &= abc_0 + ab_0c + a_0b_0c + a_0b_0c_0. \end{aligned}$$

Les quatre éléments d'extension de cette égalité évidemment sont:

$$1=abc_0, \quad 1=ab_0c, \quad 1=a_0b_0c, \quad 1=a_0b_0c_0,$$

ou sous forme de déterminations de a :

$$a=a_0+bc_0, \quad a=a_0+b_0c, \quad a=a_0(b+c_0), \quad a=a_0(b+c). \quad (3)$$

La détermination complète de a est en ce cas:

$$a=a(bc_0+b_0c)+a_0(b+c)(b+c_0). \quad (4)$$

Nous devons recevoir toutes les 16 déterminations principales excessives de a à l'aide des éliminations des éléments (3) dans la décomposition complète de a (4).

Le résultat de non-élimination des éléments est l'égalité même (4) qui est équivalente au problème donné et présente l'une de ses causes extrêmes ou formelles.

En éliminant dans la formule (4) consécutivement chacun des quatre éléments (3), nous recevrons les quatre déterminations de a :

$$\begin{aligned} a &= ab_0c + a_0b, \\ a &= abc_0 + a_0b = bc_0 + a_0bc, \\ a &= a(bc_0 + b_0c) + a_0(b+c) = bc_0 + b_0c + a_0bc, \\ a &= a(bc_0 + b_0c) + a_0(b+c_0) = bc_0 + ab_0c + a_0(bc + b_0c_0). \end{aligned}$$

Ici la première et la quatrième formules sont les déterminations bipartibles, la seconde et la troisième formules sont les déterminations coéquivalentes.

En éliminant dans la formule (4) consécutivement les deux éléments (3) à la fois, nous aurons les six déterminations de a :

$$\begin{aligned} a &= a(0 + 0) + a_0(b + c)(b + c_0) = a_0b, \\ [a &= a(0 + b_0c) + a_0.1(b + c_0) = ab_0c + a_0(b + c_0)] = (b + c_0 = 0), \\ a &= a(0 + b_0c) + a_0(b + c).1 = ab_0c + a_0(b + c) = b_0c + a_0b, \\ a &= a(bc_0 + 0) + a_0.1(b + c_0) = abc_0 + a_0(b + c_0) = \\ &= bc_0 + a_0(bc + b_0c_0), \\ a &= a(bc_0 + 0) + a_0(b + c).1 = abc_0 + a_0(b + c) = bc_0 + a_0c, \\ a &= a(bc_0 + b_0c) + a_0.1.1 = a_0 + bc_0 + b_0c. \end{aligned}$$

Ici la première formule est la détermination détaillée excessive de a et le résultat d'élimination de c . La seconde formule est la détermination fictive de a ou le résultat masqué d'élimination de a . La sixième formule est la détermination compacte excessive de a . Les trois formules restantes sont les déterminations coéquivalentes.

Les éliminations dans la formule (4) de trois éléments (3) à la fois nous donneront les quatre déterminations de a :

$$\begin{aligned} a &= a(0 + 0) + a_0.1.(b + c_0) = a_0(b + c_0), \\ a &= a(0 + 0) + a_0(b + c).1 = a_0(b + c), \\ a &= a(0 + b_0c) + a_0.1.1 = a_0 + b_0c, \\ a &= a(bc_0 + 0) + a_0.1.1 = a_0 + bc_0, \end{aligned}$$

qui sont les déterminations élémentaires excessives.

Enfin, en éliminant dans le schème (4) tous les quatre éléments (3), nous recevrons encore une détermination de a :

$$a = a(0 + 0) + a_0.1.1 = a_0$$

qui est la détermination absurde de a :

Rien ne nous empêche de convertir toutes ces 16 déterminations de a en forme de déterminations de la classe bc par exemple. Alors, outre les 16 déterminations principales de bc qui sont données dans le chapitre XIX et qui sont les conséquences principales du problème de Venn, nous aurons encore 16 déterminations principales de bc qui présentent les causes du même problème. Voilà combien de déterminations de bc nous pouvons tirer du problème de Venn au lieu d'une seule détermination $bc=0$ que savait d'y tirer l'auteur même de ce problème.

Il est encore à observer que quoique, en proposant ce problème, Venn attendait de ses disciples la réponse $bc=0$, mais il a suivi l'exposition de ses prémisses par la question indéterminée: qu'est ce que nous concluons d'ici? Dans le chapitre XIX j'ai indiqué, grâce à cette indéterminité de la question, le nombre 4096 des réponses qui expriment toutes les conséquences principales du problème dans toutes leurs formes principales. A présent je puis y ajouter encore une fois le nombre 4096 des réponses qui expriment toutes les causes principales du problème en toutes leurs formes principales. Et cependant ce ne seront que les réponses composées avec de trois lettres a , b , c du problème, sans l'aide de lettres étrangères au discours.

Il ne sera pas superflu de dire à propos ce qui suit. En formulant son problème, Venn a employé le terme „conclusion“ en qualité, comme cela se fait ordinairement, de synonyme du terme „conséquence“. Pour nous, cela s'entend, la conséquence n'est que l'une de sortes de conclusion, car nous savons déjà tirer de chaque égalité, en qualité des conclusions, toutes ses conséquences, toutes ses causes, toutes ses formes et toutes les racines de ses simples classes.

~~~~~



## Chapitre XLVI.

*La sixième méthode pour recevoir toutes les conséquences principales de l'égalité donnée—les combinaisons avec les causes manquantes. Les conséquences des prémisses du syllogisme Cesare.*

Nous savons que si l'égalité donnée  $1=M$  a le nombre  $2^n-m$  des éléments d'extension, alors l'égalité opposée  $0=M$  doit avoir le nombre  $m$  des éléments de la même sorte. Evidemment tous les éléments de l'une de ces deux égalités sont différents des éléments de l'autre.

Nous savons aussi que pour déduire de l'égalité donnée  $1=M$  ses conséquences il faut diminuer sa compréhension ou, ce qui est la même chose, augmenter son extension. S'il en est ainsi, les combinaisons consécutives de l'égalité donnée avec tous les  $2^m$  combinaisons de  $m$  éléments d'extension de l'égalité opposée  $0=M$  doivent fournir à nous toutes les  $2^m$  conséquences principales de l'égalité donnée  $1=M$ . Sans doute, toutes ces combinaisons doivent consister dans la formation des alternatives, mais non pas des systèmes, car nous savons que le système  $(A=0, B=0)$  est l'une de causes de chacune des égalités  $A=0, B=0$ , tandis que l'alternative  $(A=0; B=0)$  est l'une des conséquences de la chacune de mêmes égalités  $A=0, B=0$ .

Voilà nous avons reçu la méthode suivante pour trouver toutes les conséquences principales de chaque égalité donnée  $1=M$ : construire toutes les alternatives composées de l'égalité donnée et de toutes les combinaisons alternatives des éléments d'extension de l'égalité opposée  $0=M$  et convertir toutes ces alternatives dans les égalités isolées. Ainsi, si nous supposons que tous les  $m$  éléments d'extension de l'égalité opposée  $0=M$  sont:

$$\begin{aligned} U &= U_0 + p^{(1)}, \quad U = U_0 + p^{(2)}, \quad \dots \quad U = U_0 + p^{(m-s)}, \\ U &= U_0 q^{(1)}, \quad U = U_0 q^{(2)}, \quad \dots \quad U = U_0 q^{(s)}, \end{aligned}$$

alors la combinaison alternative de l'égalité donnée  $1=M$  présentée sous forme  $U=UM+U_0M_0$  avec l'élément de la soiret  $U=U_0+p^{(i)}$  sera:

$$U=U(M+p^{(i)})+U_0M_0$$

et la combinaison alternative de la même égalité donnée avec l'élément du type  $U=U_0q^{(k)}$  nous donnera sa conséquence:

$$U=UM+U_0M_0q^{(k)}.$$

*Exemple.* Trouver sous forme de déterminations de  $a$  toutes les conséquences principales des prémisses du syllogisme Cesare dont le schème est:

$$(ca=ab, \quad c=cb_0) \therefore (a=ac_0).$$

L'égalité unique équivalente au système de deux prémisses données est  $0=ab_0+bc$  ou sous forme de détermination de  $a$ :

$$a=aM+a_0M_0=a(a_0b_0+bc_0)+a_0(ab_0+bc)=abc_0+a_0bc. \quad (1)$$

Nous devons combiner alternativement cette égalité (1) avec toutes les combinaisons alternatives des éléments d'extension de l'égalité opposée qui est en ce cas:

$$a=a(b_0+c)+a_0(b_0+c_0)$$

ou encore:

$$a=a(bc+b_0c+b_0c_0)+a_0(a+b_0+c_0).$$

Evidemment, tous les quatre éléments d'extension de cette égalité opposée sont:

$$a=a_0+bc, \quad a=a_0+b_0c, \quad a=a_0+b_0c_0, \quad a=a_0(b_0+c_0) \quad (2)$$

Le résultat de non-combinaison de l'égalité donnée (1) avec les éléments (2) est la même égalité (1) qui est l'une des formes du problème donné ou encore la détermination complète de  $a$ .

En combinant alternativement la même égalité (1) avec chacune des éléments (2) d'après les règles données plus haut, nous recevrons les quatre conséquences suivantes:

$$\begin{aligned} a &= a(bc_0 + bc) + a_0bc = bc + abc_0, \\ [a &= a(bc_0 + b_0c) + a_0bc] = [a = a(bc_0 + b_0c), bc = 0], \\ [a &= a(bc_0 + b_0c_0) + a_0bc] = (a = ac_0, bc = 0), \\ a &= abc_0 + a_0bc(b_0 + c_0) = abc_0. \end{aligned}$$

Ici les déterminations de  $a$  sont: la première—intermédiaire, la quatrième—compacte (partielle), la seconde et la troisième—bipartibles.

Les combinaisons de l'égalité (1) avec deux éléments (2) à la fois nous donneront les six conséquences du problème, nommément:

$$\begin{aligned} a &= a(bc_0 + bc + b_0c) + a_0bc = bc + a(bc_0 + b_0c), \\ a &= a(bc_0 + bc + b_0c_0) + a_0bc = bc + ac_0, \\ a &= a(bc_0 + bc) + a_0bc(b_0 + c_0) = ab, \\ [a &= a(bc_0 + b_0c + b_0c_0) + a_0bc = a(b_0 + c_0) + a_0bc] = (bc = 0), \\ a &= a(bc_0 + b_0c) + a_0bc(b_0 + c_0) = a(bc_0 + b_0c), \\ a &= a(bc_0 + b_0c_0) + a_0bc(b_0 + c_0) = ac_0. \end{aligned}$$

Ici les déterminations 1° et 2° sont les intermédiaires. La troisième formule est la première prémisse du syllogisme et le résultat d'élimination dans le problème de la lettre  $c$ . La quatrième formule est la seconde prémisse du syllogisme et la détermination fictive de  $a$ , c'est à dire le résultat masqué d'élimination dans le problème de  $a$ . La cinquième formule est la détermination de subordination (partielle) de  $a$ .

Enfin, la sixième formule est la conclusion du syllogisme et le résultat d'élimination de  $b$ .

Les combinaisons de l'égalité (1) avec les trois éléments (2) à la fois nous donneront les quatre déterminations suivantes:

$$\begin{aligned} a &= a(bc_0 + bc + b_0c + b_0c_0) + a_0bc = a + bc, \\ a &= a(bc_0 + bc + b_0c) + a_0bc(b_0 + c_0) = a(b + c), \\ a &= a(bc_0 + bc + b_0c_0) + a_0bc(b_0 + c_0) = a(b + c_0), \\ a &= a(bc_0 + b_0c + b_0c_0) + a_0bc(b_0 + c_0) = a(b_0 + c_0), \end{aligned}$$

qui sont les conséquences élémentaires du problème ou encore ses éléments de compréhension.

Enfin, la combinaison alternative de l'égalité donnée (1) avec tous les quatre éléments (2) à la fois nous donnera une conséquence

$$a = a(bc_0 + bc + b_0c + b_0c_0) + a_0bc(b_0 + c_0) = a$$

qui est la détermination identique de  $a$ .

## Chapitre XLVII.

*La septième méthode pour recevoir toutes les conséquences de l'égalité donnée — utilisation des causes de l'égalité opposée. Les conséquences des prémisses du syllogisme Camestres.*

Nous savons que: 1°, toutes les conséquences de chaque égalité donnée  $1 = M$  présentées sous forme de déterminations de la classe prise arbitrairement  $U$  sont renfermées dans le schème:

$$U = U(M + \xi) + U_0M_0\gamma$$

et, 2°, toutes les causes de l'égalité opposée  $0 = M$  présentées sous forme de déterminations de la négation de  $U$  sont renfermées dans le schème:

$$U_0 = U_0 M_0 \xi + U(M + \eta).$$

Mais les membres droits de ces deux schèmes sont les mêmes, car, les classes  $\xi$  et  $\eta$  étant tout à fait arbitraires, nous pouvons les placer l'une au lieu de l'autre.

Cela nous donne la méthode suivante pour trouver toutes les conséquences principales de l'égalité donnée  $1 = M$ : construire sous forme de déterminations de  $U_0$  toutes les causes principales de l'égalité opposée  $0 = M$  et changer  $U_0$  en  $U$  dans les membres gauches de toutes les égalités qui présentent ces causes.

*Exemple.* Trouver sous forme de déterminations de  $a$  toutes les conséquences principales des prémisses du syllogisme Camestres dont le schème est:

$$(a = ab, c = bc) \therefore (a = ac).$$

L'égalité unique équivalente au système des prémisses données est  $0 = ab + b_0 c$ . Donc le problème opposé au problème donné doit s'exprimer par l'égalité:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 b + b_0 c_0 = (b + c_0)(b_0 + a_0) = \\ &= (a + b + c_0)(a_0 + b + c_0)(a_0 + b_0 + c)(a_0 + b_0 + c_0). \end{aligned}$$

Par conséquent les quatre éléments d'extension de ce problème opposé seront.

$$0 = a + b + c_0, 0 = a_0 + b + c_0, 0 = a_0 + b_0 + c, 0 = a_0 + b_0 + c_0,$$

ou sous forme de déterminations de  $a_0$ :

$$a_0 = a + b_0 c, a_0 = a(b + c_0), a_0 = a(b_0 + c), a_0 = a(b_0 + c_0). \quad (1)$$

La détermination complète de  $a_0$  tirée du même problème opposé évidemment est:

$$a_0 = a_0 b_0 c + a(b + c_0)(b_0 + c)(b_0 + c_0). \quad (2)$$

En remplaçant dans le membre gauche de cette égalité (2) le symbole  $a_0$  par le symbole  $a$  nous recevrons l'égalité:

$$a = a(b + c_0)(b_0 + c)(b_0 + c_0) + a_0 b_0 c \quad (3)$$

qui présente évidemment la détermination complète de  $a$  tirée de prémisses données.

Il est clair à présent que nous recevrons toutes les conséquences principales du problème donné à l'aide d'éliminations des éléments (1) dans le membre droit de l'égalité (3) suivant les règles données dans le chapitre XLV.

Le résultat de non-élimination des éléments (1) nous donne la conséquence:

$$a = ab_0 c_0 + a_0 b_0 c$$

qui est la détermination complète de  $a$ .

En éliminant dans l'égalité (3) chacun des éléments (1) nous recevrons les quatre conséquences suivantes:

$$\begin{aligned} a &= a(b + c_0)(b_0 + c)(b_0 + c_0) + a_0 \cdot 0 = ab_0 c_0, \\ a &= a \cdot 1 \cdot (b_0 + c)(b_0 + c_0) + a_0 b_0 c = ab_0 + a_0 b_0 c = b_0 c + ab_0 c_0, \\ [a &= a(b + c_0) \cdot 1 \cdot (b_0 + c_0) + a_0 b_0 c = ac_0 + a_0 b_0 c] = \\ &= (a = ac_0, b_0 c = 0), \\ [a &= a(b + c_0)(b_0 + c) \cdot 1 + a_0 b_0 c = a(bc + b_0 c_0) + a_0 b_0 c] = \\ &= [a = a(bc + b_0 c_0), b_0 c = 0]. \end{aligned}$$

Ici la première détermination est compacte (partielle), la seconde—intermédiaire, les restantes sont bipartibles.

Les éliminations dans l'égalité (3) de deux éléments (1) à la fois nous donneront les six conséquences qui sont:

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 \cdot (b_0 + c)(b_0 + c_0) + a_0 \cdot 0 = ab_0, \\ a &= a(b + c_0) \cdot 1 \cdot (b_0 + c_0) + a_0 \cdot 0 = ac_0, \\ a &= a(b + c_0)(b_0 + c) \cdot 1 + a_0 \cdot 0 = a(bc + b_0 c_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= a.1.1.(b_0 + c_0) + a_0 b_0 c = b_0 c + a c_0, \\ a &= a.1.(b_0 + c).1 + a_0 b_0 c = b_0 c + a(bc + b_0 c_0), \\ [a &= a(b + c_0).1.1 + a_0 b_0 c] = (b_0 c = 0). \end{aligned}$$

Ici les trois premières déterminations de  $a$  sont les déterminations de subordination (partielle), les deux suivantes sont intermédiaires. La première formule est la première prémisses du syllogisme et le résultat d'élimination de  $c$ . La seconde formule est la conclusion du syllogisme et le résultat d'élimination de  $b$ . La sixième formule est la seconde prémisses du syllogisme, la détermination fictive de  $a$  et le résultat masqué d'élimination de  $a$ .

Les éliminations dans l'égalité (3) de trois éléments (1) à la fois nous donneront les quatre conséquences élémentaires du problème:

$$a = a(b_0 + c_0), \quad a = a(b_0 + c), \quad a = a(b + c_0), \quad a = a + b_0 c.$$

Enfin, l'élimination dans l'égalité (3) de tous les quatre éléments (1) nous conduit à l'identité  $a = a$ .

## Chapitre XLVIII.

*Démontrer que chaque égalité logique est équivalente au système de toutes ses conséquences principales et à l'alternative de toutes ses causes principales.*

Nous savons que chaque égalité logique composée de  $n$  lettres et ayant  $m$  éléments de compréhension est équivalente 1<sup>o</sup>, au système de toutes ses  $m$  conséquences élémentaires et 2<sup>o</sup>: à l'alternative de toutes ses 2<sup>n</sup>— $m$  causes élémentaires. En généralisant ces deux vérités, nous démontrerons ici que chaque égalité est équivalente aussi: 1<sup>o</sup>, au système de toutes ses 2<sup>m</sup> conséquences principales et 2<sup>o</sup>, à l'alternative de toutes ses 2<sup>2<sup>n</sup>—<sup>m</sup></sup> causes principales.

Mais préalablement il faut démontrer les deux théorèmes suivants:

*Théorème 1:* le système composé d'une cause et d'une de ses conséquences est équivalent à la cause.

Prenons les trois schèmes connus:

$$U = U_1(M + \xi) + U_0 M_0 r, \quad (1)$$

$$U = UM + U_0 M_0, \quad (2)$$

$$U = UM\xi' + U_0(M_0 + r'), \quad (3)$$

où évidemment l'égalité (1) est la conséquence de l'égalité (2), l'égalité (2) est la conséquence de l'égalité (3) et l'égalité (1) est la conséquence de l'égalité (3). Nous devons démontrer que: 1<sup>o</sup>, le système des égalités (1) et (2) est équivalent à l'égalité (2); 2<sup>o</sup>, le système (2) et (3) est équivalent à (3) et 3<sup>o</sup>, le système (1) et (3) est équivalent à (3). Mais cela est ainsi, comme nous le montrent les calculs:

$$\begin{aligned} & [U = U(M + \xi) + U_0 M_0 r, U = UM + U_0 M_0] = \\ & = [U = UM(M + \xi) + U_0(M_0 + M_0 r)] = (U = UM + U_0 M_0), \\ & [U = UM + U_0 M_0, U = UM\xi' + U_0(M_0 + r')] = \\ & = [U = UM.M\xi' + U_0(M_0 + M_0 + r')] = [U = UM\xi' + U_0(M_0 + r')], \\ & [U = U(M + \xi) + U_0 M_0 r, U = UM\xi' + U_0(M_0 + r')] = \\ & = [U = U(M + \xi)M\xi' + U_0(M_0 r + M_0 + r')] = \\ & = [U = UM\xi' + U_0(M_0 + r')]. \end{aligned}$$

Le théorème est démontré. En particulier ce théorème nous donne:

$$(A=B, A=B) = (A=B),$$

$$(A=B, 0=0) = (A=B).$$

Il est clair à présent que le système composé de toutes les 2<sup>m</sup> conséquences principales de chaque égalité  $1=M$  doit être équivalent à cette égalité, car cette égalité se trouve



elle-même parmi ses  $2^m$  conséquences et doit les englober toutes en vertu du théorème démontré.

*Théorème 2:* l'alternative composée d'une cause et d'une de ses conséquences est équivalente à la conséquence.

Evidemment nous devons démontrer que: 1°, l'alternative composée des égalités (1) et (2) est équivalente à l'égalité (1); 2°, l'alternative de (2) et de (3) est équivalente à (2) et 3°, l'alternative de (1) et de (3) est équivalente à (1). Mais cela est ainsi, car nous avons:

$$\begin{aligned}
 & [U = U(M + \xi) + U_0 M_0 r; U = UM + U_0 M_0] = \\
 & = [U = U(M + \xi + M) + U_0 M_0 r M_0] = [U = U(M + \xi) + U_0 M_0 r], \\
 & [U = UM + U_0 M_0; U = UM\xi' + U_0 (M_0 + r')] = \\
 & = [U = U(M + M\xi') + U_0 M_0 (M_0 + r')] = (U = UM + U_0 M_0), \\
 & [U = U(M + \xi) + U_0 M_0 r; U = UM\xi' + U_0 (M_0 + r')] = \\
 & = [U = U(M + \xi + M\xi') + U_0 M_0 r (M_0 + r')] = \\
 & = [U = U(M + \xi) + U_0 M_0 r].
 \end{aligned}$$

Le théorème est démontré. En particulier ce théorème nous donne:

$$\begin{aligned}
 (A=B; A=B) &= (A=B), \\
 (A=B; 1=0) &= (A=B).
 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de doute à présent que l'alternative composée de toutes les  $2^{2^n - m}$  causes principales de chaque égalité donnée  $1=M$  doit être équivalente à cette égalité, car cette égalité se trouvant elle-même parmi ses  $2^{2^n - m}$  causes doit les englober toutes en vertu du théorème démontré tout récemment.

Il n'est pas superflu de dire encore ce qui suit. Quoique le second de deux théorèmes précédents est démontré totalement, il peut sembler néanmoins un peu paradoxal. En effet, n'est-il pas étrange que l'alternative „ou la cause ou sa conséquence“ n'exprime rien de plus que „sa conséquence“? Pour dissiper à cet égard toutes les doutes, il ne faut pas oublier que l'alternative de deux égalités quelconques  $A=B$  et  $C=D$  n'exprime rien de plus que l'existence de la troisième égalité, nommée:

$$U = U(AB + A_0B_0 + CD + C_0D_0) + U_0(AB_0 + A_0B)(CD_0 + C_0D) \quad (4)$$

qui est équivalente à cette alternative et qui est juste ou quand  $A=B$  ou quand  $C=D$ . Donc, si l'une de ces égalités, par exemple  $A=B$ , est l'une de causes de l'autre, c'est à dire de l'égalité  $C=D$ , alors pour la justesse de l'égalité (4) il suffit de vérifier la condition  $C=D$ , car si l'égalité  $C=D$  est l'une de causes ou de conditions de quelque égalité, alors l'égalité  $A=B$  doit être d'autant plus l'une de causes de la même égalité. Par conséquent, si l'égalité  $A=B$  est l'une de causes de l'égalité  $C=D$ , alors l'alternative de deux conditions  $A=B$  et  $C=D$  doit être équivalente à la condition seule  $C=D$ .

## Chapitre XLIX.

*La loi de remplacement des systèmes des égalités par les alternatives. Exemple: problème de Venn.*

Soit donné, pour être remplacé par les alternatives toutes possibles, le système exprimé à l'aide de  $n$  lettres et composé du nombre  $m$  des éléments de compréhension qui sont:

$$e^{(1)}=0, e^{(2)}=0, e^{(3)}=0, \dots, e^{(m)}=0, \dots \quad (1)$$

où  $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(m)}$  sont les minimaux du discours de ces  $n$  lettres. Le nombre des égalités qui composent ce système est sans importance.

Il est clair que le système donné est équivalent à l'égalité seule:

$$e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} + \dots + e^{(m)} = 0 \dots \quad (2)$$

Supposons que les minimaux restants du discours, en nombre  $2^n - m$ , sont:  $e^{(m+1)}, e^{(m+2)}, \dots, e^{(2^n)}$ . Leurs négations qui sont:  $e_0^{(m+1)}, e_0^{(m+2)}, \dots, e_0^{(2^n)}$  appartiennent évidemment au nombre des maximaux du discours. Or nous savons que la somme de  $m$  minimaux du discours est égale au produit du nombre  $2^n - m$  de ses maximaux qui sont les négations de tous les  $2^n - m$  minimaux restants du discours. S'il en est ainsi, l'égalité (2) doit se transformer identiquement dans l'égalité:

$$e_0^{(m+1)} e_0^{(m+2)} \dots e_0^{(2^n)} = 0, \dots \quad (3)$$

qui est, comme nous le savons, équivalente à l'alternative composée des éléments d'extension suivants:

$$e_0^{(m+1)} = 0, e_0^{(m+2)} = 0, \dots, e_0^{(2^n)} = 0 \dots \quad (4)$$

Tout cela nous montre que le système des éléments (1) est toujours équivalent à l'alternative des éléments (4) et nous recevons la formule:

$$(e^{(1)} = 0, e^{(2)} = 0, \dots, e^{(m)} = 0) = (e_0^{(m+1)} = 0; e_0^{(m+2)} = 0; \dots; e_0^{(2^n)} = 0), \dots \quad (5)$$

qui exprime la loi de remplacement d'un système composé du nombre  $m$  des éléments de compréhension par les alternatives tout—

possibles composées du nombre  $2^n - m$  des éléments d'extension respectifs.

Evidemment la plus générale forme de la loi mentionnée (5) est:

$$\begin{aligned} (U = Ue_0^{(1)} + U_0e^{(1)}, U = Ue_0^{(2)} + U_0e^{(2)}, \dots \\ \dots, U = Ue_0^{(m)} + U_0e^{(m)}) = (V = Ve^{(m+1)} + V_0e_0^{(m+1)}; \\ V = Ve^{(m+2)} + V_0e_0^{(m+2)}; \dots; V = Ve^{(2^n)} + V_0e_0^{(2^n)}), \dots \end{aligned} \quad (6)$$

où  $U$  et  $V$  sont les fonctions arbitraires.

*Exemple.* Remplacer le système

$$a = a(bc_0 + b_0c), \quad b = ab$$

qui exprime le problème de Venn par une alternative quelconque composée des égalités ayant la forme de déterminations de  $b$ .

Le système donné est équivalent au système des éléments de compréhension:

$$0 = abc, \quad 0 = ab_0c_0, \quad 0 = a_0bc, \quad 0 = a_0b_0c_0.$$

Les minimaux manquants sont:  $abc_0$ ,  $ab_0c$ ,  $a_0b_0c$ ,  $a_0b_0c_0$ .

En posant  $V = b$ , la formule (6) nous donnera:

$$\begin{aligned} [a = a(bc_0 + b_0c), \quad b = ab] = [b = b_0 + ac_0; \quad b = b_0(a_0 + c_0); \\ b = b_0(a + c_0); \quad b = b_0(a + c)]. \end{aligned}$$

Vu que

$$\begin{aligned} [b = b_0 + ac_0; \quad b = b_0(a_0 + c_0)] = [b = bac_0 + b_0(a_0 + c_0)], \\ [b = b_0(a + c_0); \quad b = b_0(a + c)] = (b = b_0a), \end{aligned}$$

nous pouvons dire que l'une des alternatives qui expriment tout le contenu logique du problème de Venn est par exemple:

$$[b = bac_0 + b_0(a_0 + c_0); \quad b = b_0a].$$

## Chapitre L.

*La loi de remplacement des alternatives des égalités logiques par les systèmes. Exemple: problème de Venn.*

Soit donnée, pour être remplacée par les systèmes tout—possibles, une alternative exprimée à l'aide de  $n$  lettrés et composée du nombre  $k$  des éléments d'extension du discours qui sont:

$$0 = E^{(1)}, 0 = E^{(2)}, 0 = E^{(3)}, \dots, 0 = E^{(k)},$$

où  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(k)}$  appartiennent au nombre des maximaux du discours.

Les jugements analogues à ceux du chapitre précédent nous donneront la formule:

$$(E^{(1)}=0; E^{(2)}=0; \dots; E^{(k)}=0) = (E_0^{(k+1)}=0, E_0^{(k+2)}=0, \dots, E_0^{(2^n)}=0),$$

qui exprime la loi de remplacement de chacune des alternatives ayant les  $k$  éléments donnés d'extension par chacun des systèmes composés du nombre  $2^n - k$  des éléments de compréhension correspondants.

La forme la plus générale de cette loi évidemment sera:

$$\begin{aligned} [U = UE_0^{(1)} + U_0 E^{(1)}; U = UE_0^{(2)} + U_0 E^{(2)}; \dots; \\ U = UE_0^{(k)} + U_0 E^{(k)}] = [V = VE^{(k+1)} + V_0 E_0^{(k+1)}, \\ V = VE^{(k+2)} + V_0 E_0^{(k+2)}, \dots, V = VE_0^{(2^n)} + V_0 E_0^{(2^n)}], \end{aligned}$$

où  $U$  et  $V$  sont les fonctions arbitraires.

*Exemple.* Remplacer par un quelconque système l'alternative:

$$(a = a_0 + bc_0 + b_0 c; b = b_0 a).$$

En ce cas nous avons:

$$\begin{aligned}(a=a_0+bc_0+b_0c) &= (0=a_0+bc+b_0c_0) = [0=a_0+(b+c_0)(b_0+c)] = \\ &= [0=(a_0+b+c_0)(a_0+b_0+c)] = (0=a_0+b+c_0; 0=a_0+b_0+c), \\ (b=b_0a) &= (0=b_0a+b) = (0=a+b) = (0=a+b+c; 0=a+b+c_0).\end{aligned}$$

Les maximaux qui manquent à l'alternative donnée étant:

$$a+b_0+c, a+b_0+c_0, a_0+b+c, a_0+b_0+c_0,$$

leurs négations sont:  $abc, ab_0c_0, a_0bc, a_0bc_0$ . Donc, d'après la loi formulée dans ce chapitre, nous aurons:

$$\begin{aligned}(a=a_0+bc_0+b_0c; b=b_0a) &= (abc=0, ab_0c_0=0, a_0bc=0, \\ & a_0bc_0=0).\end{aligned}$$

Par conséquent l'un des systèmes équivalents à l'alternative donnée sera:

$$[a=a(bc_0+b_0c), b=ab],$$

c'est à dire coïncide avec le problème de Venn.

## Chapitre LI.

*Les cas le plus simples des alternatives logiques.*

Les jugements spéculatifs sur les alternatives sont assez difficiles et peuvent facilement nous conduire aux conclusions erronées. Voilà pourquoi il faut toujours dans les cas des alternatives, en se méfiant de la force de l'esprit non—armé, joindre les égalités de chaque alternative dans une seule égalité d'après les règles données plus haut.

Nous considérerons ici les cas le plus simples des alternatives.

1°, L'alternative ( $A=0$ ;  $A=1$ ) ou, ce qui est la même chose, ( $A=0$ ;  $A_0=0$ ), étant équivalente à l'identité  $AA_0=0$ , est un schème qui n'a point de contenu logique.

2°, L'alternative ( $A=B$ ;  $A=B_0$ ) est aussi équivalente à l'identité:  $0=(AB_0 + A_0B)(AB + A_0B_0)=0$ . Donc, la proposition „A est équivalente ou à B ou à B<sub>0</sub>“ n'exprime aucunes connaissances logiques.

3°, L'alternative ( $A=AB$ ;  $A=AB_0$ ) est aussi un schème sans valeur logique, car elle est équivalente à l'identité  $0=AB_0$ .  $AB=0$ . Par conséquent la condition „sera—t—elle la classe A contenue dans B ou dans B<sub>0</sub>“ est équivalente à l'absence de condition quelconque.

4°, La proposition „A est égale ou à B ou à C“ s'exprime par l'alternative ( $A=B$ ;  $A=C$ ) qui est équivalente à l'égalité

$$0=(AB_0 + A_0B)(AC_0 + A_0C)=AB_0C_0 + A_0BC.$$

5°, La prémisse „A est contenue dans B ou dans C“ qui s'exprime par l'alternative ( $A=AB$ ;  $A=AC$ ) est équivalente à l'égalité  $0=AB_0$ .  $AC_0=AB_0C_0$  ou encore à l'égalité  $A=A(B+C)$ . Ici il n'est par superflu de dire que le jugement „A est contenue dans B et dans C“ s'exprime par l'égalité  $A=ABC$ .

6°, Le jugement „A ou B est contenue dans C“ qui correspond à l'alternative ( $A=AC$ ;  $B=BC$ ) est équivalent à l'égalité  $0=AC_0$ .  $BC_0=ABC_0$  ou encore à l'égalité  $C=C+AB$ . Mais le jugement „A et B sont contenues dans C“ s'exprime par l'égalité  $C=C+A+B$ .

7°, La prémisse „ou A est contenue dans B, ou C est contenue dans B<sub>0</sub>“ n'exprime rien, car l'alternative ( $A=AB$ ;  $C=CB_0$ ) est équivalente à l'identité  $0=AB_0$ .  $CB=0$ .

8°, Mais la proposition „ou  $A$  est équivalente à  $B$ , ou  $C$  est équivalente à  $B_0$ “ n'est pas un schème privé de valeur logique, car cette proposition correspond à l'alternative ( $A=B$ ;  $C=B_0$ ) qui est équivalente à l'égalité:

$$0=(AB_0+A_0B)(BC+B_0C_0)=AB_0C_0+A_0BC.$$

9°, La proposition „ou  $B$  est contenue dans  $C$ , ou  $B$  contient  $A$ “ n'exprime rien, car l'alternative ( $B=BC$ ;  $B=B+A$ ) est équivalente à l'identité  $0=BC_0$ .  $AB_0=0$ .

10°, Le jugement „ $A$  contient  $B$  ou  $C$ “ qui correspond à l'alternative ( $A=A+B$ ;  $A=A+C$ ) est équivalent à l'égalité  $0=A_0B$ .  $A_0C=A_0BC$  ou encore  $A=A+BC$ .

11°. Les quatre alternatives:

$$(A=0; B=0), (A=0; A=B_0), (B=0; A=B_0), \\ (A=0; B=0; A=B_0)$$

sont équivalentes, car nous avons:

$$(A=0; B=0) = (0=AB), \\ (A=0; A=B_0)=(0=A; 0=AB+A_0B_0)=(0=AB), \\ (B=0; A=B_0) = (0=B; 0=AB+A_0B_0)=(0=AB), \\ (A=0; B=0; A=B_0)=(0=AB; 0=AB+A_0B_0)= \\ = (0=AB).$$

Cela nous montre immédiatement que la vérité évidente:

$$(AB=0) \dots (A=0; B=0; A=B_0)$$

coïncide totalement avec la formule:

$$(AB=0) \dots (A=0; B=0),$$

c'est à dire avec le théorème (8) du chapitre XXXVII.



## Chapitre LII.

*Encore une fois sur le nombre des problèmes exprimés à l'aide des égalités et sur toutes les seize problèmes de deux lettres.*

J'ai montré dans le chapitre V que le nombre total des problèmes différents que l'on peut construire avec  $n$  lettres à l'aide du signe  $=$  est  $2^{2^n}$ . Cette conclusion a été faite en supposition que le signe  $=$  ne peut nous fournir que les égalités solées et les systèmes des égalités. Ici je veux montrer que l'emploi des alternatives des égalités ne peut changer aucunement la conclusion mentionnée. En effet, chaque problème, sera—t—il exprimé par un système des égalités, ou par une alternative des égalités, ou par un système des alternatives des égalités, ou enfin par une alternative des systèmes des égalités, peut être toujours présenté par une seule égalité qui à son tour peut être convertie dans la forme de détermination de chaque classe du discours  $A$  prise arbitrairement. S'il en est ainsi, tous les problèmes de  $n$  lettres seront épuisés quand nous égalerons consécutivement la classe  $A$  à toutes les  $2^{2^n}$  classes du discours. Donc le nombre total des problèmes de  $n$  lettres exprimés à l'aide du signe  $=$  est  $2^{2^n}$ , y comptant aussi les deux problèmes extrêmes qui sont: l'identité  $A=A$  et l'absurdité  $A=A_0$ .

Dans le même chapitre V sont donnés tous les seize problèmes de deux lettres  $a$  et  $b$  avec l'indication de leur décomposition dans les éléments de compréhension. Ici nous les reproduisons encore une fois avec l'indication de leur décomposition dans les éléments de toutes les deux sortes.

Ces seize problèmes présentés sous forme de déterminations de  $a$  se divisent dans les cinq groupes, nommément:

1°, un problème identique qui n'a point des éléments de compréhension, mais possède les quatre éléments d'extension, et qui est:

$$(a=a)=(a=a_0b; a=a_0b_0; a=a_0+b; a=a_0+b_0)=(a=b; a=b_0);$$

2°, les quatre problèmes avec un élément de compréhension et les trois éléments d'extension:

$$\begin{aligned}(a=ab) &= (a=a_0b; a=a_0b_0; a=a_0+b) = (a=0; b=1), \\ (a=ab_0) &= (a=a_0b; a=a_0b_0; a=a_0+b_0) = (a=0; b=0), \\ (a=a+b) &= (a=a_0b; a=a_0+b; a=a_0+b_0) = (a=1; b=0), \\ (a=a+b_0) &= (a=a_0b_0; a=a_0+b; a=a_0+b_0) = (a=1; b=1); \end{aligned}$$

3°, les six problèmes avec deux éléments de toutes les deux sortes:

$$\begin{aligned}(a=1) &= (a=a+b, a=a+b_0) = (a=a_0+b; a=a_0+b_0), \\ (a=0) &= (a=ab, a=ab_0) = (a=a_0b; a=a_0b_0), \\ (a=b) &= (a=ab, a=a+b) = (a=a_0b; a=a_0+b), \\ (a=b_0) &= (a=ab_0, a=a+b_0) = (a=a_0b_0; a=a_0+b_0), \\ (a=ab+a_0b_0) &= (a=ab, a=a+b_0) = (a=a_0b_0; a=a_0+b) = \\ &= (b=1), \\ (a=ab_0+a_0b) &= (a=ab_0, a=a+b) = (a=a_0b; a=a_0+b_0) = \\ &= (b=0); \end{aligned}$$

4°, les quatre problèmes avec trois éléments de compréhension et l'un élément d'extension:

$$\begin{aligned}(a=a_0b) &= (a=ab, a=ab_0, a=a+b) = (a=0, b=0), \\ (a=a_0b_0) &= (a=ab, a=ab_0, a=a+b_0) = (a=0, b=1), \\ (a=a_0+b) &= (a=ab, a=a+b, a=a+b_0) = (a=1, b=1), \\ (a=a_0+b_0) &= (a=ab_0, a=a+b, a=a+b_0) = (a=1, b=0); \end{aligned}$$

et enfin 5°, un problème absurde qui a quatre éléments de compréhension et n'a point des éléments d'extension et qui est:

$$(a=a_0) = (a=ab, a=ab_0, a=a+b, a=a+b_0) = (a=b, a=b_0).$$

Il est intéressant d'observer que chacun de six problèmes du troisième groupe peut être présenté dans la forme d'un système des alternatives et dans la forme d'une alternative des systèmes de la manière suivante:

$$(a=1)=[(a=1; b=0), (a=1; b=1)] = [(a=1, b=1); (a=1, b=0)],$$

$$(a=0)=[(a=0; b=1), (a=0; b=0)] = [(a=0, b=0); (a=0, b=1)],$$

$$(a=b)=[(a=0; b=1), (a=1; b=0)] = [(a=0, b=0); (a=1, b=1)],$$

$$(a=b_0)=[(a=0; b=0), (a=1; b=1)] = [(a=0, b=1); (a=1, b=0)],$$

$$(a=ab+a_0b_0)=[(a=0; b=1), (a=1; b=1)] = [(a=0, b=1); (a=1, b=1)],$$

$$(a=ab_0+a_0b)=[(a=0; b=0), (a=1; b=0)] = [(a=0, b=0); (a=1, b=0)].$$

Ainsi par exemple nous pouvons traiter la prémisse „ $a$  est équivalente à  $b$ “: 1°, comme le système de deux alternatives qui sont: „ou  $a$  est égale au zéro, ou  $b$  est égale à l'unité“ et „ou  $a$  est égale à l'unité, ou  $b$  est égale au zéro“ et 2°, comme l'alternative de deux systèmes, nommément: „ $a$  et  $b$  sont égales simultanément ou au zéro ou à l'unité.“

### Chapitre LIII.

*Encore une fois sur la méthode de construire les problèmes logiques à l'aide d'égalités.*

Dans le chapitre VI est exposé dans ce but la méthode basée sur l'emploi des systèmes des égalités. A présent, quand nous avons appris d'employer les alternatives, il n'est pas difficile de modifier la méthode mentionnée tellement que les problèmes construits soient composés non seulement de systèmes, mais aussi d'alternatives. Ainsi, si nous avons à construire un problème ayant  $n$  lettres,  $i$  prémisses et  $m$  éléments

de compréhension, alors nous devons: égaier à zéro  $m$  quelques minimaux du discours, diviser les égalités élémentaires ainsi reçues dans  $i$  groupes, joindre toutes les égalités du chaque groupe dans une seule égalité, laisser quelques de ces égalités invariables, convertir les autres dans les formes nouvelles et transformer toutes les restantes dans les alternatives.

*Exemple.* Construire à l'aide de quatre éléments de compréhension et de trois lettres  $a, b, c$  un de problèmes contenant deux prémisses l'une desquelles est une égalité et l'autre— une alternative.

Prenons par exemple les quatre éléments de compréhension du problème de Venn qui sont:

$$0=abc, 0=ab_0c_0, 0=a_0bc, 0=a_0bc_0.$$

Divisons les dans les deux groupes suivants:

$$(0=abc, 0=a_0bc), (0=ab_0c_0, 0=a_0bc_0),$$

ce qui nous donnera consécutivement:

$$\begin{aligned} 0=bc, 0=ab_0c_0 + a_0bc_0 &= (a + bc_0)(a_0 + b_0c_0), \\ 0=bc, [0=a + bc_0; 0=a_0 + b_0c_0], \\ 0=bc, [a=a_0bc_0; a=a_0 + b + c]. \end{aligned}$$

Voilà la forme confuse dans laquelle peut être transformé le problème équivalent à un simple égalité  $b=ac_0$ .

## Chapitre LIV.

*La seconde loi d'élimination de lettres dans les égalités logiques.*

Dans le chapitre XI j'ai exposé en détail les règles pour déduire de chaque égalité donnée tous les résultats d'élimination (de lettres) qui appartiennent au nombre de consé-

quences de cette égalité. Ici je parlerai de résultats d'élimination qui présentent les causes de la même égalité donnée.

Soit donnée une égalité logique  $N=0$  contenant  $n$  lettres  $a, b, c, d, \dots$ . Il faut y éliminer la lettre  $a$  tellement que le résultat de cette opération soit l'une de causes de cette égalité.

L'égalité donnée peut être présentée dans la forme:

$$0 = N(a, b, c, d, \dots) = aN(1, b, c, d, \dots) + a_0N(0, b, c, d, \dots),$$

ou, ce qui est la même chose, dans la forme:

$$0 = Ga + Ha_0, \dots \quad (1)$$

où  $G$  et  $H$  ne dépendent point de la lettre à éliminer  $a$ . Nous pouvons réduire le membre droit de cette égalité (1) aux deux formes suivantes:

$$\begin{aligned} Ga + Ha_0 &= (Ga + Ha_0) + GH, \\ Ga + Ha_0 &= (Ga + Ha_0)(G + H), \end{aligned}$$

qui nous montrent que la fonction  $Ga + Ha_0$  possède la sous-classe latente  $GH$  indépendante de la lettre  $a$  et la superclasse latente  $G + H$  qui est aussi indépendante de la même lettre  $a$ .

Afin de tirer dehors cette sous-classe et cette superclasse, il suffit de donner à la fonction  $Ga + Ha_0$  les deux formes suivantes:

$$\begin{aligned} Ga + Ha_0 &= GH + aGH_0 + a_0G_0H, \\ Ga + Ha_0 &= (G + H)[a(G + H_0) + a_0(G_0 + H)], \end{aligned}$$

où les membres droits sont la somme disjonctive et le produit disjonctif respectivement. Grâce à cela, l'égalité donnée (1) se transforme: 1<sup>o</sup>, dans le système:

$$(0 = GH, 0 = aGH_0 + a_0G_0H) \dots \quad (2)$$

et 2<sup>o</sup>, dans l'alternative:

$$[0 = G + H, 0 = a(G + H_0) + a_0(G_0 + H)] \dots \quad (3)$$

D'où nous concluons que: 1°, parmi les conséquences de l'égalité donnée (1) doit se trouver l'égalité  $GH=0$  indépendante de la lettre  $a$  et 2°, parmi les causes de la même égalité (1) doit se trouver l'égalité  $0=G+H$  indépendante aussi de la lettre  $a$ .

Voilà nous avons reçu pour chaque égalité donnée (1) les deux résultats opposés d'élimination de la lettre  $a$ , savoir:  $GH=0$  et  $G+H=0$ . Montrons à présent que ces deux résultats sont *complets*. Pour cela il suffit de dévoiler que la lettre  $a$  ne peut plus être éliminée ni dans la seconde de deux égalités (2), ni dans la seconde de deux égalités (3). Mais cela est ainsi, car les transformations de la première de ceux deux égalités dans un système et de la seconde dans une alternative, les transformations faites parfaitement ainsi comme nous avons transformée plus haut l'égalité donnée (1), nous donneront: 1°, le système

$$(0=GH_0.G_0H=0, 0=aGH_0+a_0G_0H)$$

qui ne diffère en rien de la seconde de deux égalités (2) et 2°, l'alternative

$$[0=(G+H_0)+(G_0+H)=1; 0=a(G+H_0)+a_0(G_0+H)]$$

qui ne diffère en rien de la seconde de deux égalités (3). Evidemment, cela signifie que les deux égalités  $GH=0$  et  $G+H=0$  sont les résultats *complets* d'élimination de  $a$  dans l'égalité donnée (1). Quant aux résultats *incomplets*, nous pouvons les épuiser en égalant au zéro chaque sous-classe de la fonction  $GH$  et chaque superclasse de la fonction  $G+H$ .

Revenons aux résultats complets qui sont  $GH=0$  et  $G+H=0$ . Le premier d'eux est discuté par moi en détail dans le chapitre XI. Mais le second, c'est à dire l'égalité  $G+H=0$ , est un fait nouvel à l'exploration duquel est consacré le chapitre présent.

De ce qui précède nous voyons que pour éliminer dans une égalité de la forme  $N=0$  l'une de ses lettres  $a$  afin de recevoir l'une de causes de cette égalité il faut: réduire l'égalité donnée à la forme  $Ga + Ha_0 = 0$ , où  $G$  et  $H$  ne dépendent point de  $a$ , et changer les symboles  $a$  et  $a_0$  en 1. Donc, pour l'égalité générale

$$N(a, b, c, d, \dots) = 0, \dots \quad (4)$$

que nous pouvons réduire à l'aide de développements à la forme

$$aN(1, b, c, d, \dots) + a_0N(0, b, c, d, \dots) = 0, \dots \quad (5)$$

et aussi à la forme

$$[a + N(0, b, c, d, \dots)][a_0 + N(1, b, c, d, \dots)] = 0, \dots \quad (6)$$

le résultat complet d'élimination \*) de  $a$  est évidemment:

$$N(1, b, c, d, \dots) + N(0, b, c, d, \dots) = 0, \dots \quad (7)$$

D'où cette règle générale: pour éliminer complètement la lettre quelconque  $a$  dans l'égalité de la forme (4), il faut: 1°, développer la fonction  $N$  relativement à  $a$  ou dans les minimaux de cette lettre ou dans ses maximaux, après quoi l'égalité donnée prend ou la forme (5) ou la forme (6), et 2°, ou substituer l'unité au lieu de symboles  $a$  et  $a_0$  dans la forme (5) ou évaluer au zéro la somme des coopérants des maximaux de la forme (6).

Supposons à présent que l'égalité donnée est de la forme:

$$M(a, b, c, d, \dots) = 1, \dots \quad (4^*)$$

Les deux développements de la fonction  $M$  relativement à la lettre  $a$  donnent à cette égalité la forme

$$aM(1, b, c, d, \dots) + a_0M(0, b, c, d, \dots) = 1, \dots \quad (5^*)$$

---

\*) Ici, comme partout plus loin dans ce chapitre, nous devons sous-entendre que le mot «élimination» désigne l'élimination qui nous conduit à l'une de causes de l'égalité donnée.

et la forme

$$[a + M(0, b, c, d, \dots)][a_0 + M(1, b, c, d, \dots)] = 1. \dots \quad (6^*)$$

De l'autre côté, l'égalité (4\*) est équivalente à l'égalité:

$$M_0(a, b, c, d, \dots) = 0.$$

Donc le résultat complet d'élimination de  $a$  dans l'égalité (4\*) est:

$$M_0(1, b, c, d, \dots) + M_0(0, b, c, d, \dots) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose:

$$M(1, b, c, d, \dots)M(0, b, c, d, \dots) = 1. \dots \quad (7^*)$$

De là cette seconde règle générale: pour éliminer complètement la lettre quelconque  $a$  dans l'égalité de la forme (4\*), il faut: 1°, développer la fonction  $M$  relativement à  $a$  ou dans les minimals de cette lettre ou dans ses maximals, après quoi l'égalité (4\*) prend ou la forme (5\*) ou la forme (6\*) et puis, 2°, ou égaliser à l'unité le produit des coefficients des minimals de la forme (5\*) ou substituer le zéro au lieu de  $a$  et de  $a_0$  dans la forme (6\*).

Ces deux règles admettent la généralisation. En effet: 1°, l'élimination de  $b$  dans l'égalité (7) nous donne d'après l'une de ces règles:

$$N(1, 1, c, d, \dots) + N(1, 0, c, d, \dots) + N(0, 1, c, d, \dots) + N(0, 0, c, d, \dots) = 0, \dots \quad (8)$$

et 2°, l'élimination de  $b$  dans l'égalité (7\*) nous donne d'après l'autre de mêmes règles:

$$M(1, 1, c, d, \dots)M(1, 0, c, d, \dots)M(0, 1, c, d, \dots) \cdot M(0, 0, c, d, \dots) = 1. \dots \quad (8^*)$$

Les deux règles exprimées par les formules (8) et (8\*) sont:



1°, Pour éliminer dans l'égalité de la forme (4) les deux lettres  $a$  et  $b$  à la fois, il faut d'abord développer la fonction  $N$  relativement à  $a$  et à  $b$  ou dans les minimaux de ces deux lettres ou dans leurs maximaux, ce qui nous donne ou l'égalité de la forme:

$$abN(1, 1, c, d, \dots) + ab_0N(1, 0, c, d, \dots) + a_0bN(0, 1, c, d, \dots) + a_0b_0N(0, 0, c, d, \dots) = 0, \dots \quad (9)$$

ou l'égalité de la forme:

$$[a + b + N(0, 0, c, \dots)][a + b_0 + N(0, 1, c, \dots)][a_0 + b + N(1, 0, c, \dots)][a_0 + b_0 + N(1, 1, c, \dots)] = 0, \dots \quad (10)$$

et puis on change en 1 dans la formule (9) tous les quatre symboles  $a$ ,  $a_0$ ,  $b$ ,  $b_0$ , ou égaliser au zéro la somme des coopérants des maximaux de la formule (10).

2°, Pour éliminer complètement dans l'égalité de la forme (4\*) les deux lettres quelconques  $a$  et  $b$  à la fois, il faut d'abord développer la fonction  $M$  relativement à  $a$  et à  $b$  ou dans les minimaux de ces deux lettres ou dans leurs maximaux, ce qui nous donne ou l'égalité de la forme

$$abM(1, 1, c, \dots) + ab_0M(1, 0, c, \dots) + a_0bM(0, 1, c, \dots) + a_0b_0M(0, 0, c, \dots) = 1, \dots \quad (9^*)$$

ou l'égalité de la forme:

$$[a + b + M(0, 0, c, \dots)][a + b_0 + M(0, 1, c, \dots)][a_0 + b + M(1, 0, c, \dots)][a_0 + b_0 + M(1, 1, c, \dots)] = 1, \dots \quad (10^*)$$

et puis on égaliser à l'unité le produit des coefficients des minimaux de la formule (9\*) ou substituer le zéro au lieu de chacun des quatre symboles  $a$ ,  $a_0$ ,  $b$  et  $b_0$  dans la formule (10\*).

Il n'y a pas des doute que ces deux règles présentent le premier degré de généralisation des règles d'élimination d'une seule lettre et qu'elles peuvent être étendues plus loin aux cas d'élimination de trois lettres, de quatre lettres et ainsi de suite.

Dans la pratique les classes  $N$  et  $M$  sont presque toujours les polynômes (et non pas les polyfacteurs) et leurs développements se font dans les minimaux (et non pas dans les maximaux). A ces causes pour la pratique nous n'avons que ces deux règles:

1°, Pour éliminer complètement dans l'égalité de la forme  $N=0$  quelques de ses lettres  $p, q, r, \dots$ , il faut développer la fonction  $N$  dans les minimaux de ces lettres et changer en 1 tous les symboles simples  $p, p_0, q, q_0, \dots$

2°, Pour éliminer complètement dans l'égalité de la forme  $M=1$  quelques de ses lettres, il faut développer la fonction  $M$  dans les minimaux de ces lettres et égaler à l'unité le produit de tous les coefficients de ce développement.

Regardons à présent: est-il nécessaire de développer préalablement les fonctions  $N$  et  $M$  dans les minimaux?

Prenons d'abord l'égalité du type  $M=1$  et supposons que la fonction  $M$  n'est pas développée dans les minimaux de la lettre à éliminer  $a$ . En ce cas l'égalité  $M=1$  doit être de la forme:

$$1 = Pa + Qa_0 + R,$$

où  $P, Q, R$  sont les fonctions qui ne dépendent point de la lettre  $a$ . En y éliminant d'après la règle générale la lettre  $a$ , pour le résultat complet d'élimination nous aurons finalement:

$$1 = (P + R)(Q + R) = R + PQ.$$

D'où cette règle spéciale pour le cas considéré: évaluer à l'unité la somme composée: 1°, du terme indépendant de symboles  $a$  et  $a_0$  et 2°, du produit des coefficients de  $a$  et de  $a_0$ . En particulier, pour l'égalité de la forme  $1=Pa+R$  ou de la forme  $1=Qa_0+R$  le résultat complet d'élimination de  $a$  est  $R=1$ ; pour l'égalité de la forme  $1=Pa$  ou de la forme  $1=Qa_0$  le résultat complet d'élimination de  $a$  est l'absurdité  $1=0$ . Dans ces deux derniers cas l'égalité donnée n'a point de cause indépendante de  $a$ , outre la cause extrême  $1=0$ .

Ce qui précède nous montre que pour l'égalité du type  $M=1$  la règle générale donnée plus haut exige nécessairement que la fonction  $M$  soit préalablement développée en les minimaux, car si cette condition est violée, la règle générale doit être remplacée par les règles spéciales.

Une autre chose se présente pour l'autre règle générale construite pour l'égalité du type  $0=N$ . Nous pouvons montrer qu'en ce cas le développement préalable de  $N$  dans les minimaux n'est point nécessaire. En effet, pour l'égalité

$$0=Aa+Ba_0+C, \dots \quad (11)$$

où la fonction  $N$  n'est pas développée relativement à  $a$ , la règle générale nous donnera d'abord

$$0=a(A+C)+a_0(B+C)$$

et puis finalement

$$0=(A+C)+(B+C)=A+B+C. \dots \quad (12)$$

Ce résultat complet d'élimination (12) se déduit de l'égalité donnée (11) à l'aide du simple changement de  $a$  et de  $a_0$  en 1, c'est à dire conformément à la règle générale, mais sans le développement préalable de la fonction  $N$ .

Il n'y a pas de doute que l'élimination d'une autre lettre  $b$  dans l'égalité (12) s'effectuera à l'aide de simple changement de  $b$  et de  $b_0$  en 1 et que nous pouvons déduire ce résultat de l'égalité (11) par le changement de quatre symboles  $a, a_0, b, b_0$  en 1. Et ainsi de suite. Donc, finalement la règle d'élimination des lettres pour l'égalité du type  $N=0$  prendra cette forme simple: pour éliminer dans l'égalité  $N=0$  quelques  $i$  lettres  $p, q, r, \dots$ , il suffit de changer en 1 tous les  $2i$  symboles  $p, p_0, q, q_0, \dots$ .

Il est facile à voir que les règles d'élimination ci—données pour recevoir quelques causes des égalités sont totalement inverses aux règles d'élimination construites dans le chapitre XI afin de recevoir quelques conséquences des égalités.

*Exemples:*

1°. Pour l'égalité  $0=ac+bc_0$  les résultats d'élimination qui servent de causes de cette égalité sont:

$$0=c+b, 0=c_0+a, 0=a+b,$$

tandis que les résultats qui servent de ses conséquences sont:

$$0=bc_0, 0=ac, 0=ab.$$

2°. Au contraire, pour l'égalité opposée à la précédente. c'est à dire pour l'égalité  $1=ac+bc_0$  nous avons:

les résultats qui servent de ses causes:

$$1=bc_0, 1=ac, 1=ab,$$

et les résultats qui servent de ses conséquences:

$$1=c+b, 1=c_0+a, 1=a+b.$$

3°, Pour l'égalité  $0=bd+c_0d_0+ab_0cd$  tous les deux résultats complets d'élimination de lettres  $a$  et  $b$  à la fois sont:

le résultat qui est la cause:  $0=d+c_0d_0+cd=c_0+d$ ,

le résultat qui est la conséquence:  $0=c_0d_0$ .

4°, Enfin, pour l'égalité  $1=bd+c_0d_0+ab_0cd$  opposée à la précédente les deux résultats correspondants sont:  $1=c_0d_0$  et  $1=c_0+d$ .

Revenons de nouveau spécialement aux résultats complets d'élimination qui servent de causes. Pour atteindre notre but qui est la construction de la loi générale correspondante, il ne nous reste qu'à trouver les règles d'élimination des lettres pour l'égalité du type le plus général qui est  $U=UA+U_0B$ .

Il est à observer qu'ici, semblablement à ce que nous avons eu dans le chapitre XI, le seul cas praticable est le cas où nous ne devons éliminer dans cette égalité générale  $U=UA+U_0B$  que les lettres qui entrent en  $A$  et en  $B$  et n'entrent point en  $U$ , c'est à dire les lettres l'élimination desquelles ne peut pas violer la structure de la fonction donnée  $U$ .

Vu que l'égalité  $U=UA+U_0B$  est équivalente au système  $U=UA$ ,  $U=U+B$  et aussi au système  $1=U_0+A$ ,  $0=U_0B$ , supposons que les deux résultats d'élimination de quelques des lettres qui entrent en  $A$  et en  $B$  et n'entrent point en  $U$  respectivement sont (d'après les deux règles données plus haut):

$1=A'$  pour l'égalité  $1=A$

et  $0=B'$  pour l'égalité  $0=B$ .

Mais, par condition, les lettres à éliminer n'entrent point ni en  $U$ , ni en  $U_0$ . Donc les résultats des éliminations de ces lettres seront:

$1=A'+U_0$  pour l'égalité  $1=A+U_0$

et  $0=B'U_0$  pour l'égalité  $0=BU_0$ .

Par conséquent pour le système  $U=UA$ ,  $U=U+B$  le complet résultat d'élimination considérée s'exprimera par le système  $U=UA'$ ,  $U=U+B'$ , ce qui signifie que pour l'égalité du type général  $U=UA+U_0B$  le complet résultat d'élimination mentionnée sera présenté par l'égalité  $U=UA'+U_0B'$ , où  $A'$  et  $B'$  se déduisent de  $A$  et de  $B$  conformément à ce qui est dit plus haut.

Finalement nous pouvons formuler ainsi la *seconde loi d'élimination des lettres dans les égalités logiques*: pour éliminer dans l'égalité générale  $U=UA+U_0B$ , afin de recevoir l'une de ses causes, quelques lettres  $p, q, r, \dots$  qui n'entrent point en  $U$ , il faut: 1°, remplacer la fonction  $A$  par le produit de tous les coefficients du développement de  $A$  dans les minimaux de toutes les lettres à éliminer  $p, q, r, \dots$  et 2°, remplacer en  $B$  par l'unité chacun des symboles simples  $p, p_0, q, q_0, \dots$ .

Cette loi est totalement inverse à la *première loi d'élimination* exposée dans le chapitre XI.

*Exemple 1.* Eliminer complètement  $b$  dans l'égalité

$$a=ab_0c+a_0(b+d).$$

Le résultat qui est la cause de cette égalité évidemment est:

$$a=a.0+a_0(1+d)=a_0,$$

tandis que le résultat qui est la conséquence de la même égalité sera:

$$a=a.1.c+a_0d=ac+a_0d.$$

*Exemple 2.* En éliminant  $a$  dans l'égalité  $bc=a+b$  ou, ce qui est la même chose, dans l'égalité

$$bc=bc(a+b)+(b_0+c_0)(a+b),$$

nous aurons pour le résultat qui est sa cause:

$$bc = bc.b + (b_0 + c_0).1 = 1$$

et pour le résultat qui est sa conséquence:

$$bc = bc(1 + b) + (b_0 + c_0)b = bc + bc_0 = b.$$

*Exemple 3.* En éliminant  $c$  dans la même égalité que nous pouvons présenter ainsi:

$$a + b = (a + b)bc + a_0b_0.bc,$$

nous aurons pour le résultat qui est sa cause:

$$a + b = (a + b).0 + a_0b_0.b = 0$$

et pour le résultat qui est sa conséquence:

$$a + b = (a + b)b + a_0b_0.0 = b.$$

Semblablement à ce que nous avons vu dans le chapitre XI, le *nombre total* des complets résultats d'élimination de la sorte ici considérée dans une égalité ayant  $n$  lettres doit s'égaliser à  $2^n$ . A ce nombre nous insérons aussi: 1<sup>o</sup>, le résultat de non-élimination qui n'est autre chose que l'égalité donnée et 2<sup>o</sup>, le résultat d'élimination de toutes ses  $n$  lettres qui est toujours une absurdité  $1 = 0$ . Quelques de ces  $2^n$  résultats coïncident les uns avec les autres; beaucoup d'eux sont les absurdités.

*Exemple.* Trouver tous les seize complets résultats d'élimination de la seconde sorte pour l'égalité

$$0 = bd + c_0d_0 + ab_0cd$$

dont tous les seize complets résultats d'élimination de la première sorte sont donnés dans le chapitre XI.

Les dix résultats des éliminations sont en ce cas les absurdités  $0=1$ . Les six résultats restants évidemment sont: 1°, le résultat de non-élimination—l'égalité donnée; 2°, le résultat d'élimination de  $a$ :  $0=bd+c_0d_0+b_0cd$ ; 3°, de  $b$ :  $0=c_0+d$ ; 4°, de  $c$ :  $0=a+b+d_0$ ; 5°, de  $d$ :  $0=a+b+c$ ; enfin, 6°, de  $a$  et de  $b$ :  $0=c_0+d$ . Ici le résultat 3° coïncide avec le résultat 8°.

Sur la fin de ce chapitre il est à observer que, semblablement aux résultats masqués d'élimination de la première sorte, ils doivent aussi exister *les résultats masqués* d'élimination de la seconde sorte ici considérée. Nous rencontrons souvent cette sorte des résultats d'élimination en construisant toutes les causes des égalités données. Si toutes les causes d'une égalité contenant  $n$  lettres doivent avoir la forme des détermination d'une fonction de quelques  $n-i$  de ces lettres, alors chaque résultat d'élimination de la seconde sorte dans l'égalité donnée de quelques de ces  $n-i$  lettres, étant aussi l'une de ses causes, doit être nécessairement masqué. Chaque résultat masqué doit avoir la forme de la détermination fictive  $P=PQ+P_0Q_0$  dont la vraie valeur est  $Q_0=0$ . Par exemple, pour l'égalité  $0=ax+bx_0$  l'une de ses causes principales est l'égalité  $x=xa_0b_0+x_0(a+b)$  qui présente la détermination fictive de  $x$  et le résultat masqué d'élimination de  $x$  dans l'égalité donnée, car la vraie valeur de cette cause est évidemment  $0=a+b$ . Un autre exemple: pour les prémisses du syllogisme Barbara, c'est à dire pour le système  $a=ab$ ,  $b=bc$ , nous avons trouvée dans le chapitre XLIV la cause  $a=abc-+a_0(b_0+c_0)$  qui présente le résultat masqué d'élimination de  $a$  dans les prémisses données, car la vraie valeur de cette cause est  $0=b_0+c_0$ .

---



## Chapitre LV.

*La loi des causes principales. Seconde forme de la loi des conséquences principales. Exemple.*

Dans le chapitre XX j'ai proposée la formule simple:

$$U = U\xi + U_0\eta \dots \dots \quad (1)$$

qui exprime la loi des conséquences principales pour chaque problème  $1=M$  et qui est soumise à la condition que les valeurs des classes arbitraires  $\xi$  et  $\eta$  soient renfermées dans les deux séries suivantes:

$$1; p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(m-s)}; p^{(1)}p^{(2)}, p^{(1)}p^{(3)}, \dots, p^{(1)}p^{(2)} \dots p^{(m-s)} \dots \quad (2)$$

$$0; k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(s)}; k^{(1)} + k^{(2)}, k^{(1)} + k^{(3)}, \dots, k^{(1)} + k^{(2)} + \dots + k^{(s)} \dots \quad (3)$$

en supposition que les  $m$  éléments de compréhension du problème donné  $1=M$ , divisés dans les deux groupes différents, sont:

$$U = Up^{(1)}, U = Up^{(2)}, \dots, U = Up^{(m-s)}, \dots \quad (4)$$

$$U = U + k^{(1)}, U = U + k^{(2)}, \dots, U = U + k^{(s)} \dots \quad (5)$$

Ici je veux construire une autre formule, analogue à la formule (1) et exprimant toutes les causes principales de la même égalité générale  $1=M$ .

Dans le chapitre XXIX j'ai montré que toutes les causes principales de l'égalité  $1=M$  se déduisent de l'égalité:

$$U = UM\xi + U_0(M_0 + \eta), \dots \quad (6)$$

ou, ce qui est la même chose, du système:

$$U = UM\xi, U = U + M_0 + \eta \dots \quad (7)$$

pour les valeurs de  $\xi$  et de  $\eta$  données par les séries:

$$1; K_0^{(1)}, K_0^{(2)}, \dots, K_0^{(i-m+s)}; K_0^{(1)}K_0^{(2)}, K_0^{(1)}K_0^{(3)}, \dots, \\ K_0^{(1)}K_0^{(2)} \dots K_0^{(i-m+s)} \dots \quad (8)$$

$$0; P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, \dots, P_0^{(2^{n-i-s})}; P_0^{(1)}+P_0^{(2)}, P_0^{(1)}+P_0^{(3)}, \dots, \\ P_0^{(1)}+P_0^{(2)}+\dots+P_0^{(2^{n-i-s})}, \dots \quad (9)$$

construites en supposition que les  $2^n - m$  éléments de compréhension de l'égalité  $0 = M$  opposée à l'égalité donnée  $1 = M$  sont:

$$U = UK_0^{(1)}, U = UK_0^{(2)}, \dots, U = UK_0^{(i-m+s)}, \dots \quad (10)$$

$$U = U + P_0^{(1)}, U = U + P_0^{(2)}, \dots, U = U + P_0^{(2^{n-i-s})}, \dots \quad (11)$$

où nous supposons que  $n$  est le nombre des lettres de l'égalité donné,  $i$  est le nombre des minimaux de la fonction  $U$ .

La formule (6) ne peut pas nous satisfaire en ce moment, parce qu'elle exprime non seulement toutes les causes principales de l'égalité  $1 = M$ , mais aussi toutes ses causes généralement. Voilà pourquoi nous devons chercher une autre formule n'exprimant que les causes principales spécialement.

Il est clair que si les  $2^n - m$  éléments de compréhension de l'égalité opposée  $0 = M$  sont (10) et (11), alors les  $2^n - m$  éléments d'extension de l'égalité donnée  $1 = M$  doivent être:

$$U = U_0 + K^{(1)}, U = U_0 + K^{(2)}, \dots, U = U_0 + K^{(i-m+s)}, \dots \quad (12)$$

$$U = U_0 P^{(1)}, U = U_0 P^{(2)}, \dots, U = U_0 P^{(2^{n-i-s})} \dots \quad (13)$$

S'il en est ainsi, il n'est pas difficile de se convaincre que, pour tirer de la même formule (6) ou du système (7) toutes les  $2^{2^n - m}$  causes principales de l'égalité donnée  $1 = M$ ,

nous pouvons aussi prendre pour  $\xi$  et pour  $\gamma$ , au lieu des valeurs données par les séries (8) et (9), les valeurs renfermées dans les séries suivantes:

$$0; K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(i-m+s)}; K^{(1)} + K^{(2)}, K^{(1)} + K^{(3)}, \dots, \\ K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(i-m+s)}, \dots \quad (14)$$

$$1; P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(2-i-s)}; P^{(1)}P^{(2)}, P^{(1)}P^{(3)}, \dots, \\ P^{(1)}P^{(2)} \dots P^{(2-i-s)} \dots \quad (15)$$

Pour cela il suffit de montrer que les  $2^{i-m+s}$  classes (14), étant prises consécutivement pour  $\xi$ , nous donnent les valeurs différentes de la fonction  $UM\xi$  et que les  $2^{2-i-s}$  classes (15), étant prises consécutivement pour  $\gamma$ , nous donnent les valeurs différentes de la fonction  $U + M_0 + \gamma$ .

Dans ce but nous démontrerons que si les valeurs de  $\xi$  sont renfermées dans la série (14) et les valeurs de  $\gamma$  dans la série (15), alors le produit  $UM\xi$  est égal à  $\xi$  et la somme  $U + M_0 + \gamma$  est égale à  $\gamma$ . Mais cela est ainsi, car tous les  $i-m+s$  minimaux précédents  $K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(i-m+s)}$  sont les minimaux de la fonction  $UM$  et tous les  $2^n-i-s$  maximaux précédents  $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(2-i-s)}$  sont les maximaux de la somme  $U + M_0$ . S'il en est ainsi, la loi générale des causes (6) doit se transformer dans la formule simple:

$$U = \xi + U_0\gamma, \dots \quad (16)$$

qui doit fournir pour les valeurs (14) et (15) de  $\xi$  et de  $\gamma$  le nombre  $2^{2-i-s} \cdot 2^{i+s-m} = 2^{2-m}$  des valeurs différentes de  $U$ , c'est à dire toutes les causes principales de l'égalité donnée  $1 = M$ .

Nous recevrons la même formule (16) par une autre voie, de la manière suivante. Les conditions  $UM\xi=\xi$  et  $U + M_o + \tau=\tau$  transforment le système (7) dans le système:  $U=\xi$ ,  $U=\tau$  ou, ce qui est la même chose, dans l'égalité seule  $U=U\xi\eta + U_o(\xi + \tau)$  qui coïncide avec la formule (16), car en ce cas  $\xi\eta=\xi$ ,  $U\xi=\xi$ ,  $\xi + \tau=\tau$ .

La formule (16) exprime évidemment la loi des causes principales avec la condition que  $\xi$  et  $\tau$  aient les valeurs (14) et (15).

Vu qu'en ce cas  $U\xi=\xi$ , la formule (16) peut aussi être présentée tellement:

$$U=U\xi + U_o\tau,$$

après quoi elle prend la même forme que la loi des conséquences principales (1).

D'où nous concluons que: 1°, la même formule (1) exprime les deux lois considérées, c'est à dire la loi des causes principales et la loi des conséquences principales, et 2°, la première de ces deux lois s'exprime aussi par la formule spéciale (16).

Afin de trouver la formule spéciale exprimant la seconde de deux lois mentionnées, il suffit d'observer que pour les valeurs de  $\tau$  données par la série (3) nous avons toujours identiquement  $U_o\tau=\tau$ , après quoi la formule générale (1) se transforme dans la formule spéciale:

$$U=\tau + U\xi. \dots \dots (17)$$

Finalement nous pouvons dire que: 1°, la loi des causes principales s'exprime par chacune des formules (1) et (16) en supposition que les valeurs de  $\xi$  et de  $\tau$  sont renfermées dans les séries (14) et (15) et 2°, la loi des conséquences

principales s'exprime par chacune des formules (1) et (17) en supposition que les valeurs de  $\xi$  et de  $\eta$  sont renfermées dans les séries (2) et (3).

*Exemple.* Trouver par la méthode de ce chapitre sous forme de déterminations de  $b$  toutes les causes principales et toutes les conséquences principales pour l'égalité  $a=bc$ .

Cette égalité a les éléments:

1°, de compréhension:  $0=ab_0c$ ,  $0=abc_0$ ,  $0=ab_0c_0$ ,  $0=a_0bc$ ,  
et 2°, d'extension:  $0=a+b+c$ ,  $0=a+b+c_0$ ,  $0=a+b_0+c$ ,  
 $0=a_0+b_0+c_0$ ,

ou sous forme de déterminations de  $b$ :

1°,  $b=b+ab_0c$ ,  $b=b(a_0+b_0+c)$ ,  $b=b+ab_0c_0$ ,  
 $b=b(a+b_0+c_0)$ ,  
2°,  $b=b_0(a+b+c)$ ,  $b=b_0(a+b+c_0)$ ,  $b=b_0+a_0bc_0$ ,  
 $b=b_0+abc$ .

Les séries (2), (3), (14) et (15) seront en ce cas:

1;  $a_0+b_0+c$ ,  $a+b_0+c_0$ ;  $b_0+ac+a_0c_0$ , .... (2\*)

0;  $ab_0c$ ,  $ab_0c_0$ ;  $ab_0$ , .... (3\*)

0;  $a_0bc_0$ ,  $abc$ ;  $b(a_0c_0+ac)$ , .... (14\*)

1;  $a+b+c$ ,  $a+b+c_0$ ;  $a+b$ , .... (15\*)

En multipliant toutes les classes de la première de ces quatre séries par  $b$  et toutes les classes de la quatrième par  $b_0$  nous aurons:

$b$ ,  $b(a_0+c)$ ,  $b(a+c_0)$ ,  $b(ac+a_0c_0)$ , .... (2\*\*)

0,  $ab_0c$ ,  $ab_0c_0$ ,  $ab_0$ , .... (3\*\*)

0,  $a_0bc_0$ ,  $abc$ ,  $b(a_0c_0+ac)$ , .... (14\*\*)

$b_0$ ,  $b_0(a+c)$ ,  $b_0(a+c_0)$ ,  $b_0a$ , .... (15\*\*)

En ajoutant consécutivement toutes les classes de la série (2\*\*) aux toutes les classes de la série (3\*\*) et en égalant

chaque de ces sommes à  $b$ , nous recevrons toutes les seize conséquences principales de l'égalité donnée  $a=bc$ . De même, en ajoutant consécutivement toutes les classes de la série (14\*\*) aux toutes les classes de la série (15\*\*) et en égalant chacune de ces sommes à  $b$ , nous recevrons toutes les seize causes principales de la même égalité donnée. Nous aurons:

I, les conséquences principales:

- 1°,  $b=b+0=b$ ,
- 2°,  $b=b+ab_0c=b+ac$ ,
- 3°,  $b=b+ab_0c_0=b+ac_0$ ,
- 4°,  $b=b+ab_0=b+a$ ,
- 5°,  $b=b(a_0+c)+0=b(a_0+c)$ ,
- 6°,  $b=b(a_0+c)+ab_0c=ac+ba_0$ ,
- 7°,  $[b=b(a_0+c)+ab_0c_0]=(ac_0=0)$ ,
- 8°,  $b=b(a_0+c)+ab_0=ac+ba_0+b_0ac_0$ ,
- 9°,  $b=b(a+c_0)+0=b(a+c_0)$ ,
- 10°,  $b=b(a+c_0)+ab_0c=ac+bc_0$ ,
- 11°,  $b=b(a+c_0)+ab_0c_0=ac_0+b(ac+a_0c_0)$ ,
- 12°,  $b=b(a+c_0)+ab_0=a+ba_0c_0$ ,
- 13°,  $b=b(ac+a_0c_0)+0=b(ac+a_0c_0)$ ,
- 14°,  $b=b(ac+a_0c_0)+ab_0c=ac+ba_0c_0$ ,
- 15°,  $b=b(ac+a_0c_0)+ab_0c_0$ ,
- 16°,  $b=b(ac+a_0c_0)+ab_0=ac+ba_0c_0+b_0ac_0$ ;

II, les causes principales:

- 1°,  $b=0+b_0=b_0$ ,
- 2°,  $b=0+b_0(a+c)=b_0(a+c)$ ,
- 3°,  $b=0+b_0(a+c_0)=b_0(a+c_0)$ ,
- 4°,  $b=0+b_0a=b_0a$ ,
- 5°,  $b=b_0a_0c_0+b_0=b_0+a_0c_0$ ,

- $6^0, [b=ba_0c_0+b_0(a+c)]=(a+c=0),$   
 $7^0, b=ba_0c_0+b_0(a+c_0)=a_0c_0+b_0a,$   
 $8^0, b=ba_0c_0+b_0a,$   
 $9^0, b=bac+b_0=b_0+ac,$   
 $10^0, b=bac+b_0(a+c)=ac+b_0(ac_0+a_0c),$   
 $11^0, b=bac+b_0(a+c_0)=ac+b_0c_0,$   
 $12^0, b=bac+b_0a=ac+b_0ac_0,$   
 $13^0, b=b(a_0c_0+ac)+b_0=b_0+ac+a_0c_0,$   
 $14^0, b=b(a_0c_0+ac)+b_0(a+c)=ac+ba_0c_0+b_0(ac_0+a_0c),$   
 $15^0, b=b(a_0c_0+ac)+b_0(a+c_0)=ac+a_0c_0+b_0ac_0,$   
 $16^0, b=b(a_0c_0+ac)+b_0a=ac+ba_0c_0+b_0ac_0.$

## Chapitre LVI.

*Les résultats d'élimination de la seconde sorte traités comme les causes principales.*

Dans le chapitre XXI j'ai exposé l'une de méthodes possibles pour recevoir tous les complets résultats d'élimination de la première sorte d'après la loi des conséquences principales. Ici je veux indiquer l'une de méthodes possibles pour recevoir tous les complets résultats d'élimination de la seconde sorte d'après la loi des causes principales.

Prenons la formule spéciale des causes principales:

$$U=\xi+U_0\eta,\dots\quad (1)$$

où  $\xi$  et  $\eta$  ont les valeurs renfermées dans les séries (14) et (15) du chapitre précédent.

En laissant la série (14) invariable et en multipliant toutes les classes de la série (15) par  $U_0$ , nous aurons les deux séries:

$$\begin{aligned}
 0; K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(i-m+s)}; K^{(1)}+K^{(2)}, K^{(1)}+K^{(3)}, \dots, \\
 K^{(1)}+K^{(2)}+\dots+K^{(i-m+s)}\dots\dots
 \end{aligned} \quad (2)$$

$$U_0; U_0P^{(1)}, U_0P^{(2)}, \dots, U_0P^{(2-i-s)}, U_0P^{(1)}P^{(2)}, U_0P^{(1)}P^{(3)}, \dots, \\ U_0P^{(1)}P^{(2)} \dots P^{(2-i-s)} \dots \quad (3)$$

Donc la formule des causes principales (1) peut être remplacée par la formule:

$$U=V+W, \dots \quad (4)$$

où  $V$  est l'une de classes de la série (2),  $W$  est l'une des classes de la série (3).

Nous appliquerons la formule (4) à la recherche relativement à l'égalité  $1=M$ , en forme de déterminations de  $U$ , de tous les résultats complets d'élimination (de la seconde sorte) des lettres qui n'entrent point dans l'expression de  $U$ .

En constatant, à l'aide des jugements analogues aux ceux du chapitre XXI, le fait de l'existence possible pour chaque problème des quelques résultats d'élimination de chaque lettre, nous ne considérerons ici que les résultats complets.

Supposons que les séries (2) et (3) sont composées régulièrement et successivement, c'est à dire: les combinaisons binaires sont données là plut tôt que les combinaisons triples, ces dernières plus tôt que les combinaisons quadruples et ainsi de suite. Supposons encore que les dernières classes indépendantes des lettres à éliminer qui n'entrent point dans l'expression de  $U$  sont: dans la série (2) la classe  $G$  et dans la série (3) la classe  $U_0H$ . Alors le résultat complet d'élimination demandée sera évidemment  $U=G+U_0H$ . En particulier, si la fonction  $U$  est l'une de classes simples, par exemple  $a$ , alors pour construire le résultat masqué d'élimination de  $a$  il suffit de prendre dans les séries (2) et (3) pour  $V$  et  $W$  les classes où les coefficients de  $a$  et de  $a_0$  sont les négations mutuelles.



*Exemple.* Trouver en forme de déterminations de  $b$  tous les résultats complets d'élimination de la seconde sorte pour l'égalité  $a=bc$ , pour laquelle tous les résultats complets d'élimination de la première sorte sont trouvés dans le chapitre XXI.

De ce qui est donné dans le chapitre précédent (LV) nous voyons qu'en ce cas les séries (2) et (3) sont respectivement:

$$0, abc, a_0bc_0, b(ac+a_0c_0), \dots \quad (2^*)$$

$$b_0, b_0(a+c), b_0(a+c_0), b_0a, \dots \quad (3^*)$$

Toutes les causes principales de l'égalité donnée  $a=bc$  seront épuisées en égalant  $b$  à la somme de chacune des classes de la série (2\*) avec chacune des classes de la série (3\*). Mais ici nous ne devons construire que celles des causes qui sont les résultats complets d'élimination de la seconde sorte dans l'égalité donnée. Vu que cette égalité n'a que trois lettres, on doit avoir les 2<sup>3</sup> résultats complets d'élimination des lettres de la seconde sorte (aussi bien que de la première sorte). Nous les trouverons tous, en forme demandée des déterminations de  $b$ , consécutivement. Quelques de ces résultats doivent coïncider les uns avec les autres.

1°. Le résultat de non—élimination des lettres doit, comme toujours, coïncider avec la détermination complète de la fonction prise pour  $U$ . Dans notre cas ce résultat est évidemment:

$$b=b(ac+a_0c_0)+b_0a.$$

2°. Pour éliminer complètement la lettre  $a$ , il faut prendre dans les séries (2\*) et (3\*) les dernières des classes indépendantes de  $a$ . Telles classes sont 0 et  $b_0$  respectivement. Par conséquent le résultat complet d'élimination de  $a$  dans le

problème donné est l'absurdité  $b=0+b_0=b_0$ . Cela désigne que la lettre  $a$  ne peut point être éliminée du problème.

3°, 4° et 5°. S'il en est ainsi, les trois résultats des éliminations: de  $a$  et de  $b$ , de  $a$  et de  $c$ , et de  $a$ , de  $b$  et de  $c$  doivent aussi coïncider avec l'absurdité  $b=b_0$ .

6°. Pour éliminer complètement la lettre  $c$ , il faut prendre dans les séries (2\*) et (3\*) les dernières des classes indépendantes de  $c$ . Donc, il faut poser:  $V=0$ ,  $W=b_0a$ , et nous aurons:  $b=b_0a$ .

7°. Pour éliminer complètement la lettre  $b$ , il faut construire la détermination fictive de  $b$ . Dans ce but il faut prendre dans les séries (2\*) et (3\*) pour  $V$  et  $W$  les classes, où les coefficients de  $b$  et de  $b_0$  sont les négations mutuelles. Telles classes évidemment sont:  $a_0bc_0$  et  $b_0(a+c)$ . Donc le résultat masqué d'élimination de  $b$  sera:  $b=ba_0c_0+b_0(a+c)$ . La vraie valeur de cette égalité est:  $a+c=0$ .

Enfin, 8°, le résultat d'élimination de  $b$  et de  $c$  à la fois s'obtient en prenant  $V=0$ ,  $W=b_0$  et nous aurons de nouveau l'absurdité  $b=b_0$ .

(A. suivre).

P. Poretsky.

## Второй дифференціальный параметръ квадратичной въ дифференціалахъ формы $n$ независимыхъ переменныхъ.

Въ послѣдующемъ предлагается достаточно простой выводъ второго дифференціального параметра квадратичной въ дифференціалахъ формы  $n$  независимыхъ переменныхъ <sup>1)</sup>.

Пусть имѣется квадратичная въ дифференціалахъ форма  $n$  переменныхъ  $x_i$  ( $i=1, 2, 3 \dots n$ ):

$$f = \sum_{r,s} a_{rs} dx_r dx_s \quad (a_{rs} = a_{sr}),$$

которая формулами преобразованія:

$$x_i = x_i' (x_1', x_2', x_3', \dots x_n') \quad (i=1, 2, 3 \dots n)$$

переводится въ

$$f' = \sum_{r,s} a'_{rs} dx'_r dx'_s.$$

---

<sup>1)</sup> Насколько я могу судить изъ письма ко мнѣ профессора Luigi Bianchi, которому я сообщалъ свой выводъ, онъ имѣетъ общее съ соответствующимъ приемомъ Beltrami; но въ чемъ сходство и разница обоихъ приемовъ — мнѣ неизвѣстно, потому что достать «Atti dell'Accademia di Bologna, 1869», гдѣ помѣщенъ мемуаръ Beltrami, я не имѣлъ возможности.

Если обозначимъ:

$$H = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$H' = \begin{vmatrix} a_{11}'a_{12}' \dots a_{1n}' \\ a_{21}'a_{22}' \dots a_{2n}' \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}'a_{n2}' \dots a_{nn}' \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} \frac{\partial x_1}{\partial x_2'} \dots \frac{\partial x_1}{\partial x_n'} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} \frac{\partial x_2}{\partial x_2'} \dots \frac{\partial x_2}{\partial x_n'} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_1'} \frac{\partial x_n}{\partial x_2'} \dots \frac{\partial x_n}{\partial x_n'} \end{vmatrix},$$

то какъ известно:

$$\frac{1}{H} = \pm \frac{D}{H} \dots \dots \dots (1)$$

Изъ теоріи опредѣлителей известно также, что обозначая миноръ элемента

$$\frac{\partial x_s}{\partial x_r'}$$

въ опредѣлителѣ  $D$  черезъ

$$\alpha_{sr},$$

будемъ имѣть:

$$\sum_r \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial x_r'} = 0.$$

Если  $M_s$  ( $s=1,2,3\dots n$ ) и  $U$  суть функции отъ  $x_i$  ( $i=1,2,\dots n$ ), то рассмотримъ сумму:

$$\frac{1}{H} \sum_s M_s \frac{\partial U}{\partial x_s},$$

которая въ переменныхъ  $x'_i$  можетъ быть очевидно представлена въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{1}{H'} \sum_p M'_p \frac{\partial U}{\partial x'_p},$$

такъ-что

$$\frac{1}{H} \sum_s M_s \frac{\partial U}{\partial x_s} = \frac{1}{H'} \sum_p M'_p \frac{\partial U}{\partial x'_p}, \quad (2)$$

при чемъ:

$$\frac{M_s}{H} = \frac{1}{H'} \sum_p M'_p \frac{\partial x_s}{\partial x'_p}.$$

Составивъ теперь сумму:

$$\frac{1}{H} \sum_s M_s \alpha_{sr}$$

и вспомнивъ разложеніе опредѣлителя ( $D$ ) по элементамъ будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \sum_s M_s \alpha_{sr} &= \frac{1}{H'} \sum_{s,p} M'_p \alpha_{sr} \frac{\partial x_s}{\partial x'_p} = \\ &= \frac{1}{H'} \sum_p \left[ M'_p \sum_s \alpha_{sr} \frac{\partial x_s}{\partial x'_p} \right] = \frac{M'_r D}{H'}. \end{aligned}$$

Значитъ, на основаніи (1):

$$M'_r = \sum_s \alpha_{sr} M_s.$$

Дифференцируемъ это равенство по  $x'_r$  и беремъ сумму по  $r$ :

$$\sum_r \frac{\partial M'_r}{\partial x'_r} = \sum_{r,s} \alpha_{sr} \frac{\partial M_s}{\partial x'_r} + \sum_{r,s} M_s \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial x'_r}.$$

Замѣчая, что

$$\frac{\partial M_s}{\partial x'_r} = \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} = \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} + \frac{\partial M_s}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x'_r},$$

$$\sum_{r,s} \alpha_{sr} \frac{\partial M_s}{\partial x'_r} = \sum_{r,s} \left[ \alpha_{sr} \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \right] + \sum_{r,s} \alpha_{sr} \frac{\partial M_s}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x'_r},$$

и что далѣе:

$$\sum_{r,s} \alpha_{sr} \frac{\partial M_s}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x'_r} = \sum_s \frac{\partial M_s}{\partial x_s} \left[ \sum_r \alpha_{sr} \frac{\partial x_s}{\partial x'_r} \right] = D \cdot \sum_s \frac{\partial M_s}{\partial x_s},$$

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} \left[ \alpha_{sr} \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \right] &= 0; \quad \sum_{r,s} M_s \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial x'_r} = \\ &= \sum_s M_s \cdot \sum_r \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial x'_r} = 0 \end{aligned}$$

будемъ имѣть:

$$\sum_r \frac{\partial M'_r}{\partial x'_r} = D \cdot \sum_s \frac{\partial M_s}{\partial x_s}.$$

На основаніи (1) приходимъ къ равенству:

$$\frac{1}{H} \sum_s \frac{\partial M_s}{\partial x_s} = \frac{1}{H} \sum_r \frac{\partial M'_r}{\partial x'_r}. \quad (3)$$

Такъ какъ функція

$$A_1 U = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s},$$

гдѣ  $A_{rs}$  есть миноръ члена  $a_{rs}$  опредѣлителя  $H^2$ , дѣленный на  $H^2$ , есть первый дифференціальный параметръ, т. е. формулами преобразования

$$x_i = x_i (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad i=1, 2, 3 \dots n$$

переводится въ

$$\sum_{p,q} A'_{pq} \frac{\partial U}{\partial x'_p} \frac{\partial U}{\partial x'_q},$$

гдѣ  $A'_{rs}$  миноръ члена  $a'_{rs}$  опредѣлителя  $H^2$ , дѣленный на  $H^2$ , то написавъ:

$$\sum_s \frac{\partial U}{\partial x_s} \left[ \sum_r A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \right] = \sum_p \frac{\partial U}{\partial x'_p} \left[ \sum_q A'_{pq} \frac{\partial U}{\partial x'_q} \right],$$

замѣчаемъ, что въ формулѣ (2) можно теперь положить:

$$M_s = H \sum_r A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r}, \quad M_p = H' \sum_q A'_{pq} \frac{\partial U}{\partial x'_q},$$

а значить формула (3) дастъ:

$$\frac{1}{H} \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} \left[ H \sum_r A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \right] = \frac{1}{H'} \sum_p \frac{\partial}{\partial x'_p} \left[ H' \sum_q A'_{pq} \frac{\partial U}{\partial x'_q} \right].$$

Полученное равенство и показываетъ, что *выраженіе:*

$$\frac{1}{H} \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} \left[ H \sum_r A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \right]$$

*есть дифференціальный параметръ, который принято называть „вторымъ“ и обозначать черезъ  $\Delta_2 U$  <sup>1)</sup>.*

Въ частности, для формы двухъ переменныхъ  $u$  и  $v$ :

$$Edu^2 + 2 Fdudv + Gdv^2$$

<sup>1)</sup> Bianchi Lezioni di Geometria Differenziale. Pisa, 1894. p. 45.

будетъ

$$a_{11}=E, \quad a_{12}=a_{21}=F, \quad a_{22}=G, \quad H^2=EG-F^2, \quad A_{11}= \\ =\frac{G}{H^2}, \quad A_{12}=A_{21}=\frac{-F}{H^2}, \quad A_{22}=\frac{E}{H^2}$$

и поэтому:

$$\Delta_1 U = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{G \frac{\partial U}{\partial u} - F \frac{\partial U}{\partial v}}{H} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{E \frac{\partial U}{\partial v} - F \frac{\partial U}{\partial u}}{H} \right\}.$$

*Иванъ Блѣкинъ.*

Кіевъ. 18 мая 1900.



## Объ уравненіи

$$A) \varphi^2(y) - \theta(y-x)\varphi^2(x) = \varphi(y+x)\varphi(y-x).$$

---

Требуется найти функции  $\varphi$  и  $\theta$ , тождественно удовлетворяющія уравненію A) <sup>1)</sup>.

Полагая

$$y=x,$$

получимъ въ силу A):

$$1) \varphi^2(x)[1-\theta(o)] = \varphi(2x)\varphi(o).$$

Подстановка

$$x=0$$

въ это уравненіе даетъ:

$$\varphi^2(o)\theta(o)=o.$$

Слѣдовательно, одно изъ чиселъ  $\varphi(o)$  или  $\theta(o)$  равно нулю.

I Случай:

$$B) \theta(o)=o.$$

Уравненіе 1) будетъ:

$$2) \varphi^2(x) = \varphi(2x)\varphi(o).$$

---

<sup>1)</sup> *Примѣчаніе.* Задача эта по просьбѣ г. Семиколѣнова, была предложена проф. А. Васильевымъ 11 марта текущаго года въ засѣданіи мѣстнаго Физ. Мат. Общества. Тогда же мною было указано значеніе  $D'$  функции  $\theta$ .

Отсюда слѣдуетъ, что вообще  $\varphi(0)$  не равно нулю. Полученному уравненію удовлетворяетъ, какъ извѣстно, лишь одна функція

$$C) \varphi(x) = Ae^{ax},$$

гдѣ  $A$  и  $a$ —произвольныя постоянныя. Внеся это значеніе въ  $A$ ), найдемъ:

$$D) \theta(y-x)=0$$

тождественно. Поэтому уравненіе  $A$ ) должно быть вида:

$$A') \varphi^2(y) = \varphi(y+x)\varphi(y-x)$$

II Случай:

$$B') \varphi(0)=0.$$

Въ этомъ случаѣ изъ 1) выведемъ:

$$C') \theta(0)=1.$$

Полагая въ  $A$  сначала  $y=-x$ , а затѣмъ  $y=0$ , получимъ въ силу  $B')$  и  $C')$

$$\frac{\varphi^2(-x)}{\varphi^2(x)} = \theta(-2x); \quad \frac{\varphi(-x)}{\varphi(x)} = -\theta(-x).$$

Отсюда

$$\theta(-2x) = \theta^2(-x)$$

или, замѣняя  $x$  чрезъ  $(-x)$ ,

$$\theta(2x) = \theta^2(x).$$

Полученное соотношеніе въ силу  $C')$  тождественно со 2). Слѣдовательно,

$$D') \theta(x) = e^{2bx},$$

гдѣ  $b$ —произвольное постоянное.

Поэтому уравненіе  $A$ ) должно имѣть видъ:

$$A'') \varphi^2(y) - e^{2b(y-x)} \varphi^2(x) = \varphi(y+x)\varphi(y-x).$$

Подставляя сюда

$$E) \varphi(x) = e^{ax} \eta(x),$$

получимъ уравненіе

$$F) \eta^2(y) - \eta^2(x) = \eta(y+x)\eta(y-x),$$

откуда легко опредѣлить  $\eta$ .

Полагая въ немъ:

$$x=0,$$

найдемъ:

$$\eta(0) = 0.$$

Полагая затѣмъ:

$$y=0$$

и пользуясь полученнымъ результатомъ, придемъ къ равенству:

$$\eta(x) = -\eta(-x)$$

т. е.,  $\eta$  — нечетная функція. Дифференцирование по  $y$  уравненія  $F)$  дастъ:

$$2\eta(y)\eta'(y) = \eta'(y+x)\eta(y-x) + \eta(y+x)\eta'(y-x).$$

Дифференцируя полученное уравненіе по  $x$ , получимъ:

$$0 = \eta''(y+x)\eta(y-x) - \eta(y+x)\eta''(y-x),$$

откуда

$$\frac{\eta''(y+x)}{\eta(y+x)} = \frac{\eta''(y-x)}{\eta(y-x)}.$$

Слѣдовательно, отношеніе  $\frac{\eta''}{\eta}$  постоянное число  $a$ . Итакъ

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = a\eta.$$

Отсюда

$$\eta(x) = Be^{x\sqrt{a}} + Ce^{-x\sqrt{a}},$$

гдѣ  $B$  и  $C$ —произвольныя постоянныя. Но, какъ мы видѣли,

$$\eta(0)=0.$$

Поэтому  $B+C=0$ ; слѣдовательно,

$$\eta(x)=B \left( e^{x\sqrt{a}} - e^{-x\sqrt{a}} \right).$$

Отсюда въ силу  $E$ )

$$\varphi(x)=Be^{bx} \left( e^{x\sqrt{a}} - e^{-x\sqrt{a}} \right)$$

Мы пришли такимъ образомъ къ слѣдующему выводу.

Уравненіе  $A$ ) можетъ имѣть лишь два вида:

$$\text{I) } \varphi^2(y)=\varphi(y+x)\varphi(y-x) \text{ и II) } \varphi^2(y)-e^{2by-x}\varphi^2(x)= \\ =\varphi(y+x)\varphi(y-x),$$

гдѣ  $b$ —какое угодно постоянное число. Рѣшеніями этихъ уравненій будутъ соотвѣтственно

$$\text{I) } \varphi(x)=Ae^{ex}; \text{ II) } \varphi(x)=Be^{bx} \left( e^{x\sqrt{a}} - e^{-x\sqrt{a}} \right).$$

Д. Н. Зеймеръ.

12 марта 1900 г.

## II.

# ЛѢТОПИСЬ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА,

## Протоколъ 95 засѣданія.

26 февраля 1900 года.

Присутствовало 10 членовъ и около 100 постороннихъ лицъ; засѣданіе имѣло мѣсто въ Физическомъ Кабинетѣ).

1. *В. А. Ульянинъ* сообщилъ: „О способахъ улавливанія электрическихъ волнъ“. Послѣ перечисленія различныхъ способовъ улавливанія электрическихъ волнъ былъ демонстрированъ способъ терморезонатора. Было показано: отраженіе отъ плоскаго зеркала, концентрація лучей линзой изъ парафина, интерференція при отраженіи отъ зеркалъ Френеля, и измѣреніе показателя преломленія парафина помощью этихъ зеркалъ.

2. *Д. А. Гольдхаммеръ* сообщилъ: „Новые прерыватели для катушки Румкорфа“. Показаны были кромѣ старыхъ прерывателей Фуко, Дебре, новые очень быстрые прерыватели, ртутный турбинный отъ Allgem. El. Gesellschaft и электролитическій Венельта, преимущественно въ выработанной въ здѣшнемъ Физическомъ кабинетѣ формѣ. Указано было на выгоду этихъ прерывателей для Рентгеновскихъ трубокъ.

---

## Протоколъ 96 засѣданія.

11 марта 1900 года.

(Присутствовало 11 членовъ и 5 постороннихъ лицъ).

1. Рѣшено поручить казначею обмѣнить мелкія ренты фонда Лобачевского на крупныя.

2. А. В. Васильевъ прочелъ въ выдержкахъ по русски статью Janssen'a van Ray: „Мысли голландскихъ геометровъ о теоріи параллелей и о неевклидовой геометріи“.—Замѣчанія сдѣлалъ Д. Н. Зейлигеръ.

3. Секретарь прочелъ отчетъ о ревизіи кассы Общества „Казань, 1900 г. 29 февраля. Мы нижеподписавшіеся члены ревизіонной Коммисіи Казанскаго Физико - Математическаго Общества, провѣривъ наличность кассы Общества (I. Фондъ Н. И. Лобачевского. II. Неприкосновенный капиталъ. III. Лекціонный фондъ. IV. Капиталъ Д. И. Дубяго), хранящуюся частью въ Государственномъ Банкѣ по распискамъ за №№ 29904, 29906, 30721, 30726, 30727, 30730, 30740, 30832, 30905, 30309, 30993, 33073, частью въ Сберегательной кассѣ Государственного Банка за № 33415, частью въ видѣ Государственной Ренты за № 0483 Серія 136, частью наличными деньгами (на рукахъ у казначея Общества) въ количествѣ 35 р. 06 к., нашли всё въ примѣрномъ порядкѣ, что и свидѣтельствуемъ своимъ подписомъ. К. И. Котеловъ. В. Ульяновъ.

4. А. В. Васильевъ по просьбѣ г. Семикознова предложилъ для рѣшенія функціональное уравненіе

$$\varphi^2(y) - \Theta(y-x)\varphi^2(x) = \varphi(y+x)\varphi(y-x).$$

Въ обсужденіи этой задачи приняли участіе нѣкоторые члены общества.

---

## А. К. Жбиковскій.

(Сообщеніе, слѣланное въ засѣданіи 7 октября 1900 г.  
*Н. В. Нечаевымъ*).

17 марта нынѣшняго года скончался одинъ изъ членовъ—учредителей математической секціи общества естествоиспытателей при Казанскомъ университетѣ А. К. Жбиковскій.

Покойный отлалъ 50 лѣтъ своей жизни педагогической дѣятельности въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ и Университетѣ, оставилъ послѣ себя многочисленныхъ учениковъ, изъ которыхъ многіе посвятили себя тому же дѣлу преподаванія. Въ то же время онъ усердно занимался продолженіемъ своего математическаго образованія, результатомъ чего было полученіе имъ степеней магистра и доктора чистой математики и рядъ ученыхъ и педагогическихъ трудовъ.

Эти труды не мѣшали ему 1) въ молодости посѣщать общество, дирижировать танцами и даже—что кажется несовмѣстнымъ съ его дѣятельностью—переписывать стихами съ извѣстнымъ поэтомъ Сырокомлей и самому изливать въ грустныхъ стихотвореніяхъ горестныя событія своей жизни, потери близкихъ людей и пр. 2) въ старости онъ не потерялъ способности увлекаться наукой, преподаваніемъ ея въ гимназій и университетѣ и удивлялъ своихъ знакомыхъ и друзей своею необыкновенной жизнерадостностью. Прибавимъ, что онъ—правда при помощи близкихъ родныхъ, замѣнившихъ его сиротамъ родную мать—далъ хорошее воспитаніе и образованіе своимъ дѣтямъ, дѣйствуя на нихъ и сердечнымъ словомъ и примѣромъ своей трудовой жизни. Невольно удивляешься, какъ онъ могъ найти время на все это. Достигъ онъ этого умѣньемъ работать, аккуратностью и точностью въ распредѣленіи времени. Покойный преподаватель Боржимовскій, который въ молодости жилъ вмѣстѣ съ нимъ на одной квартирѣ, рассказывалъ мнѣ, что не разъ, вернувшись съ вечера, гдѣ А. К. съ увлеченіемъ отдавался танцамъ, онъ, ложась

спать, видѣлъ, какъ А. К. садился за столъ заниматься. На его замѣчаніе, что это глупый педантизмъ, А. К. отвѣчалъ, что онъ долженъ прочесть то, что назначено, иначе нарушится планъ его занятій. И только проработавъ часа два, онъ ложился спать.

Позвольте познакомить Васъ, М. г., съ біографіей покойнаго члена нашего общества. Жизнь его не блещитъ какими либо выдающимися событіями. Это скромная жизнь педагога, не разорвавшего связи съ Университетомъ и наукою. Онъ пещъ въ теченіи 50 лѣтъ тяжелый трудъ преподавателя, облегчая его сознаніемъ, что его скромные труды не пройдутъ даромъ, что нѣкоторые изъ его учениковъ полюбятъ его науку и будутъ продолжать его любимое дѣло образованія молодого поколѣнія. Онъ старался находить такихъ учениковъ и развивать ихъ способности. Можетъ быть, имѣя въ виду такихъ именно учениковъ, онъ составилъ свой учебникъ слишкомъ серьезнымъ. Но съ другой стороны онъ примѣнялся къ среднимъ, даже плохимъ ученикамъ, стараясь сообщить имъ возможно большее количество знаній. Не ограничиваясь стѣнами школы онъ выступалъ въ качествѣ лектора съ своими рѣчами: о приложеніи геометріи къ жизни, о теоріи вѣроятностей. Факты его молодой жизни описаны имъ самимъ такимъ образомъ:

Я родился 21 сентября 1829 г. въ деревнѣ Долгобычевѣ, Грубешовскаго уѣзда, Люблинской губерніи, а окрещенъ въ Опечевѣ именемъ Антонъ. Первымъ наставникомъ моимъ былъ учитель школы въ Тышовцахъ Грубешовскаго уѣзда, затѣмъ я учился въ Штебжеской школѣ, гдѣ пробылъ лишь одинъ годъ и потомъ,—въ виду болѣзненнаго состоянія моего отца, вышедшаго въ отставку и поселившагося въ имѣніи моей матери, т. е. въ Равскомъ уѣздѣ,—я долженъ былъ продолжать образованіе въ Петроковской гимназіи, какъ самой близкой отъ имѣнія, въ каковой гимназіи я и окончилъ всѣ 7 классовъ, получивъ аттестатъ зрѣлости. Въ продолженіе всего моего пребыванія въ гимназіи я болѣе всего отдавался математикѣ, которую затѣмъ я избралъ цѣлью моей жизни. Семья моя, усматривая изъ выдаваемыхъ намъ въ гимназіи табелей мои постоянные успѣхи по математикѣ, пожелала, чтобы я сдѣлался военнымъ полковымъ инженеромъ, для каковой цѣли моя мать послала меня въ Петербургъ. 31 іюля 1846 года, провожаемый съ большимъ горемъ семьей, а въ особенности своей матушкой, я поѣхалъ въ вышеупомянутый городъ. Черезъ 6 дней я прибылъ въ огромный городъ одинокій, безъ всякаго покровительства. 16-и лѣтній юноша, я долженъ былъ самъ обо всемъ заботиться. Я чрезвычайно обрадовался, когда слу-



чайно повстрѣчался со своимъ давнишнимъ школьнымъ товарищемъ Бочилинскимъ; который въ это время находился въ университетѣ и переходилъ на 4-й курсъ. Я всецѣло отдалъ себя подъ его покровительство и во всемъ слушалъ его. Такъ, по его совѣту я одновременно сталъ сдавать экзаменъ въ Инженерномъ корпусѣ и въ Университетѣ, а такъ какъ экзаменъ въ университетѣ окончился ранѣе экзамена въ Инженерномъ корпусѣ и я оказался по мнѣнію экзаменаторовъ достойнымъ быть принятымъ въ университетъ, то я и не окончилъ экзамена въ Инженерномъ корпусѣ, къ чему на меня повліяли и совѣты многихъ студентовъ. 20 Августа я былъ записанъ университетскимъ начальствомъ въ книги студентомъ 2-го отдѣленія философскаго факультета (математическихъ наукъ). Все время моего пребыванія въ университетѣ я посвящалъ по преимуществу усердному и искреннему изученію Математики, Механики, Физики, Астрономіи и началъ естественныхъ наукъ; всѣ перечисленныя науки доставляли мнѣ одинаковое удовольствіе и однажды я былъ въ большомъ затрудненіи, когда меня спросили, какой предметъ болѣе другихъ мнѣ нравится. Ежегодно, какъ для здоровья, такъ и для удовольствія свиданія со своей матушкой, я ѣздилъ на вакачъ въ Петроковъ, въ каковомъ городѣ моя матушка постоянно проживала для воспитанія моего брата. Въ послѣдній годъ, въ виду намѣренія кончить университетъ кандидатомъ, я занялся диссертацией, предметомъ коей избралъ я вычисленіе пути вновь открытой кометы, причемъ избрать такой предметъ понудило меня какъ желаніе лучше познакомиться съ Астрономіей, которую я зналъ хуже другихъ наукъ, такъ и соображенія практическаго свойства. Іюня я получилъ изъ С.-Петербургскаго университета дипломъ на ученую степень кандидата физико-математическихъ наукъ. Въ то время, когда я хотѣлъ поспѣшить уѣхать въ Царство Польское съ новыми привилегіями и ими обрадовать мою благодѣтельницу матушку, я получилъ сграшное извѣстіе о ея смерти. Это громадное для меня горе удержало меня отъ намѣренія возвратиться въ Царство Польское и я тотчасъ же сталъ ходатайствовать о полученіи стипендіи на магистра. Постановленіемъ Варшавскаго Попечителя отъ 1850 года мнѣ было отказано въ означенной стипендіи. Мнѣ не оставалось ничего болѣе, какъ принять мѣсто учителя либо въ Царствѣ Польскомъ, либо въ Имперіи. Одно счастливое обстоятельство помогло мнѣ получить мѣсто Старшаго преподавателя Геодезіи и Межеванія въ Вильнѣ (25 Апрѣля 1852 года) подъ условіемъ предварительно отбыть межевую практику, съ которой въ

университетъ не знакомятся. Для таковой практики меня командировали къ начальнику размежеванія Тверской губерніи полковнику Фонъ-Эссену, который откомандировалъ меня къ партіи Антушевича, производившей измѣренія въ Зубцовскомъ уѣздѣ. Одинъ мѣсяцъ я работалъ съ топографомъ Егоровымъ въ деревнѣ Люшинѣ, расположенной на берегу Волги. Потомъ уже одному мнѣ было поручено произвести подробное измѣреніе двухъ деревень Быковой и Дорофеевой. 1 Сентября я окончилъ измѣреніе и для обрисовки и вычерчиванія плановъ я перешелъ въ село Стеразино, въ то время главную квартиру Антушевича. Окончивъ 1 октября чертежи, я возвратился въ Тверь, а 15 октября изъ Твери въ Вильно, на мѣсто моего назначенія. Преподавая свой излюбленный предметъ, геодезію низшую и высшую, я сталъ мечтать о той пользѣ, какую я принесу для западнаго края, подготавливая для него способныхъ землеѣровъ. Но уже къ концу второго года моей службы я узналъ, что Правительство намѣрено закрыть эту школу, такъ какъ цѣль, въ виду которой эта школа была организована, т. е. люстрація помѣщичьихъ имѣній не можетъ осуществиться. И дѣйствительно 1 сентября 1854 года Межевое училище было закрыто. Мнѣ продолжали выдавать жалованье впредъ до полученія новаго мѣста учителя математики, какъ человѣку, повинному въ закрытіи училища. Въ такомъ положеніи безъ всякихъ постоянныхъ занятій я находился до 15 сентября 1855 г., какового числа я получилъ мѣсто старшаго учителя математики и физики въ Минской гимназіи. 15 января 1856 г. Директоръ Минской гимназіи представилъ меня на должность Старшаго воспитателя при гимназическомъ дворянскомъ пансіонѣ. Министръ утвердилъ это представленіе. 1 Сентября 1860 года я отказался отъ должности старшаго воспитателя при пансіонѣ и вмѣсто этого былъ я назначенъ учителемъ топографіи во вновь открытомъ при Минской гимназіи межевомъ училищѣ и вмѣстѣ съ тѣмъ мнѣ было поручено исправлять обязанности инспектора въ означенномъ училищѣ. 23 Декабря 1860 г. я получилъ орденъ Станислава 3-й степени. Въ концѣ 1860 г. я окончилъ ариметику для 7 го класса подъ заглавіемъ „Основанія общей Ариметики для VII класса гимназій“ и рукопись отослалъ въ Петербургъ на разсмотрѣніе Ученаго комитета. Въ это же время я послалъ въ Петербургскую Академію наукъ статью о дѣлимости чиселъ подъ заглавіемъ „Note sur la divisibilité des nombres“. Эта статья была удостоена напечатаніемъ въ Академическомъ бюллетенѣ, а мнѣніе Ученаго комитета было мнѣ сообщено 1 августа 1861 г. такими

словами: „по разсмотрѣніи сочиненія г-на Жбиковскаго въ Ученомъ комитетѣ главнаго правленія училищъ оно найдено полезнымъ для посвящающихъ себя исключительно математическимъ наукамъ и вслѣдствіе такого отзыва комитета, Департаментъ народнаго просвѣщенія предлагаетъ г-ну Жбиковскому получить въ видѣ пособія для напечатанія помянутаго сочиненія 400 руб. сер. съ тѣмъ, чтобы доставить въ департаментъ 800 экземпляровъ“.—Я согласился на такое предложеніе Департамента и напечаталъ означенную Арифметику въ типографіи Товарищества „Общественная Польза“ въ Петербургѣ за 450 р.—1400 экземпляровъ. Печатаніе окончилось въ Маѣ 1862 г. Съ конца 1860 г. я активно принадлежалъ къ редакціи математическаго журнала издаваемого Гусевымъ подъ заглавіемъ „Вѣстникъ математическихъ наукъ“, въ которомъ до начала 1863 года я помѣстилъ 8 статей. На Пасхѣ 1863 г. я началъ ходатайствовать о перемѣщеніи меня въ Казанскій округъ. На представленіе обо мнѣ Виленскаго попечителя, Казанскій попечитель отвѣтилъ, что единственное вакантное мѣсто учителя математики въ его округѣ имѣется въ Вяткѣ,—согласенъ ли г. Жбиковскій принять это мѣсто съ субсидіей отъ правительства? Я согласился и 15 Іюня 1864 г. я получилъ мѣсто старшаго преподавателя математики и физики въ Вятской гимназіи. Я получилъ пособіе 621 р. 90 к., а самъ истратилъ на переездъ съ женой и четырьмя дѣтьми 707 р. 72 к. На вакантъ въ 1865 г. я уѣхалъ изъ Вятки въ Петербургъ, чтобы сдать экзаменъ на магистра чистой математики“.

На этомъ кончается рукопись. Вотъ дальнѣйшіе факты его жизни: Выдержавъ экзаменъ на магистра, онъ защитилъ въ Казани въ 1867 году диссертацию „объ Эйлеровыхъ интегралахъ“. Счастливый магистръ чистой математики, онъ отправляется въ Вятку, гдѣ онъ тогда служилъ, и на срединѣ дороги получаетъ печальное извѣстіе о смерти обожаемой жены, памяти которой онъ остался вѣрнымъ всю свою жизнь. Полученіе второй ученой степени также сопровождалось семейнымъ горемъ... Въ томъ же году онъ переводится въ Императорскую Казанскую первую гимназію. Въ 1871 году онъ получаетъ степень доктора чистой математики, званіе приватъ-доцента Казанскаго университета, а спустя нѣкоторое время—преподавателя физики Казанскаго ветеринарнаго института. Въ 1874 году онъ получаетъ званіе заслуженнаго преподавателя гимназіи, въ 1880 году является однимъ изъ членовъ—учредителей математической секціи Общества естествоиспытателей

при университетѣ, въ которой много лѣтъ несъ званіе члена совѣта.

Его магистерская диссертация обнаруживаетъ слѣды усерднаго изученія Эйлеровыхъ интеграловъ—этого важнаго и интереснаго отдѣла математики—и знанія литературы, относящейся къ этому отдѣлу. Результатомъ изученія теоріи вѣроятностей и ея приложений—была докторская диссертация „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ формулъ Эйлера и Стирлинга къ теоріи вѣроятностей“—посвященная трудному, но интересному вопросу этой науки.

Ученые труды его слѣдующіе:

1. „Note sur la divisibilité des nombres“ замѣтка, напечатанная въ III томѣ Бюллетеней академіи наукъ. 1860 г.

2. Статьи напечатанныя въ Вѣстникѣ математическихъ наукъ, издаваемомъ Гусевымъ съ 1860 г. 20 Декабря по 1863 г. 10 мая:

а) „Относительно признаковъ дѣлимости чиселъ“ см. № 1. томъ I.

б) „Относительно теоремы Вильсона“ см. № 4, томъ I.

с) „Новая теорема относительно первыхъ чиселъ Сильвестера“ см. № 8, томъ I.

д) „Теорема Сильвестера относительно Бернулиевыхъ чиселъ“ см. № 13, томъ I.

е) „Элементарный выводъ формулъ для функций  $x^n + \frac{1}{x^n}$ “ см. № 19, томъ I.

ф) „Элементарное изложеніе теоріи опредѣлителей“ см. №№ 30, 32, 35 томъ II.

г) „По поводу замѣчанія г-на Износкова въ № 36 и выводъ формулы Чебышева“ см. №. 37, томъ II.

3. „Теорія планиметра Амслера“ напечатана въ Ученыхъ запискахъ Казанскаго Университета, 1866 г.

4. „Объ Эйлеровыхъ интегралахъ“—диссертация на степень магистра, напечатана въ Ученыхъ запискахъ Казанскаго Университета, 1867 г.

5. „Простѣйшій выводъ формулы Эйлера съ остаткомъ“ напечатано въ Бюллетенѣ академіи наукъ. 1870 г.

6. „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ формулъ Эйлера и Стирлинга къ теоріи вѣроятностей“ сочиненіе, напечатанное для полученія степени доктора. Казань 1871 г.

7. „Обобщеніе теоремъ Моавра и Котеса“, сообщеніе, напечатанное въ протоколахъ IV сѣзда Естествоиспытателей, 1873 г.

8. Сообщенія, напечатанныя въ протоколахъ математической секціи общества естествоиспытателей въ Казани:

а) „О геометрическихъ построеніяхъ, относящихся къ пирамидѣ Хеопса, 30 января 1882 г.

д) „О кубическихъ уравненіяхъ, корни которыхъ стороны треугольника“ 18 апрѣля 1887 г.

е) „По поводу теоремы Коши“ 27 Декабря 1887 г.

ф) „Къ вопросу о нахожденіи высшаго прелѣла дѣйствительныхъ корней уравненія“ 1888 г.

Педагогическіе:

9. „Основанія общей ариметики для (VIII) класса гимназій“ Петербургъ 1862 г. Сочиненіе, напечатанное съ пособіемъ отъ Министерства народнаго просвѣщенія.

10. „Простѣйшій способъ находить среднюю геометрически-пропорціональную между двумя прямыми линіями“; напечатано въ Педагогическомъ журналѣ, Москва. 1865 г.

11. „Основанія общей ариметики для VII класса гимназій“, 2-ое изданіе. С.-Петербургъ 1868 г.

б) „О правильныхъ многоугольникахъ“ 1884 г.

с) „Приложеніе прямолинейной тригонометріи къ ученію о правильныхъ многогранникахъ“ 1886 г.

12. „Основанія общей ариметики для VIII класса гимназій“ въ 3-хъ частяхъ, 3-е изданіе, С.-Петербургъ, 1890 г.

13. „Символическая формула произведенія многочленовъ“ напечатано въ Вѣстникѣ опытной физики и элементарной математики Шпачинскаго XIV сем. № 161, 1893 г.

14. „Замѣченные промахи въ сборникѣ геометрическихъ задачъ для 7-го и 8 классовъ гимназій, составленномъ Н. Соколкинымъ“ напечатано въ Вѣстникѣ опытной физики и элементарной математики Шпачинскаго. XIV Сем. № 166. 1893 г.

Онъ занимался также переводами французскихъ математическихъ сочиненій (Лежандра, Делабра и др.) на польскій языкъ но онѣ остались неизданными. При чтеніи математическихъ сочиненій онъ всегда продѣлывалъ вычисленія въ особыхъ, аккуратно веденныхъ тетрадахъ (brouillon'ax). Они испрежены различными замѣтками, иногда служащими уясненіемъ читаннаго авторомъ, а иногда содержащими оригинальные выводы А. К.

Самый важный его трудъ есть „Основанія Об. Ар.“ выдержавшій 3 изданія (62, 68 и 90 г.). Последнее изданіе дополнено 3-ей частью, содержащею вопросы высшей алгебры,

*[The following page contains extremely faint, illegible markings.]*

三三·4°:42

• • • • •

# ПОНЯТІЕ О ЧИСЛѢ

Проф. Д. Гильберта<sup>1)</sup>.

Сравнивая многочисленныя работы о началахъ арифметики и объ аксіомахъ геометріи, мы замѣчаемъ, на ряду съ многочисленными аналогіями и сходствами между этими двумя предметами, вмѣстѣ съ тѣмъ и различіе въ методѣ изслѣдованія.

Представимъ себѣ прежде всего тотъ путь, которымъ вводится понятіе о числѣ. Исходя изъ понятія о числѣ 1, процессомъ счета образуютъ дальнѣйшія цѣлыя раціональныя положительныя числа и развиваютъ законы ихъ счета; затѣмъ переходятъ, основываясь на требованіи общей выполнимости вычитанія, къ цѣлому отрицательному числу; потомъ опредѣляютъ дробное число, какъ пару чиселъ--тогда каждая линейная функція обладаетъ нулевою точкою —и наконецъ вещественное число, какъ сѣченіе или какъ основной рядъ раціональныхъ чиселъ —тогда достигаютъ того, что каждая цѣлая раціональная неопредѣленная, и вообще каждая непрерывная неопредѣленная функція имѣетъ нулевую точку. Мы можемъ назвать эту методу введенія понятія о числѣ *генетическимъ* методомъ, ибо при этомъ самое общее понятіе о вещественномъ числѣ производится послѣдовательнымъ расширеніемъ простаго понятія о цѣломъ положительномъ числѣ.

Существенно иначе поступаютъ при построеніи геометріи. Здѣсь обыкновенно начинаютъ съ допущенія существованія всѣхъ изучаемыхъ въ геометріи элементовъ т. е. съ самаго начала предполагаютъ существованіе трехъ системъ вещей, именно точекъ, прямыхъ и линій, и затѣмъ устанавливаютъ соотношеніе между этими элементами -- въ существенныхъ

---

<sup>1)</sup> Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 8. S. 180 —184. Переводъ сдѣланъ А. В. Васильевымъ.

чертахъ слѣдую Евклиду—съ помощью извѣстныхъ аксіомъ. а именно аксіомъ сочетанія, порядка, конгруенціи и непрерывности<sup>1)</sup>. Тогда выступаетъ необходимо задача, показать *отсутствіе противорѣчій и полноту* въ системѣ аксіомъ г. е. должно быть доказано, что примѣненіе выставленныхъ аксіомъ не можетъ никогда привести къ противорѣчію, и далѣе, что система аксіомъ достаточна для доказательства всѣхъ геометрическихъ предложеній. Мы можемъ назвать такой порядокъ изслѣдованія *методомъ аксіоматическимъ*.

Я ставлю теперь вопросъ: дѣйствительно-ли именно генетическій методъ единственный примѣнимый для изученія понятія о числѣ, и напротивъ аксіоматическій единственный, который примѣнимъ въ изученіи основаній геометріи; мы въѣмъ также интереснымъ сопоставить два метода и изслѣдовать сравнительныя преимущества обоихъ методовъ при логическомъ изслѣдованіи основаній механики и другихъ физическихъ доктринъ.

По моему мнѣнію, *несмотря на высокое педагогическое и эвристическое значеніе генетическаго метода аксіоматическій методъ имѣетъ однако передъ нимъ преимущество въ томъ случаѣ, если требуется дать законченное представленіе и полное логическое утвержденіе содержанія нашего познанія*.

Въ теоріи понятія о числѣ аксіоматическій методъ принимаетъ слѣдующій видъ. Мы мыслимъ систему вещей; мы называемъ эти вещи числами и обозначаемъ ихъ  $a, b, c, \dots$ . Мы мыслимъ эти вещи въ извѣстныхъ взаимныхъ отношеніяхъ, которыхъ точное и полное описаніе заключается въ слѣдующихъ аксіомахъ:

### I. Аксіомы сочетанія.

I. 1. Изъ числа  $a$  и изъ числа  $b$  образуется посредствомъ „Сложенія“ опредѣленное число  $c$ ; это обозначается символически:

$$a + b = c \text{ или } c = a + b.$$

I. 2. Если  $a$  и  $b$  суть данныя числа, то существуетъ всегда одно и только одно число  $x$  и также одно и только одно число  $y$  такъ-что:

$$a + x = b \text{ и соотвѣтственно } y + a = b.$$

---

<sup>1)</sup> Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Leipzig. B. Teubner. 1899.



I. 3. Существует определенное число — оно обозначается  $0$  — такъ-что для каждаго  $a$  мы имѣемъ одновременно:

$$a + 0 = a \text{ и } 0 + a = a.$$

I. 4. Изъ числа  $a$  и числа  $b$  образуется также посредствомъ „Умноженія“ определенное число  $c$ ; употребляя обозначенія:

$$ab = c \text{ или } c = ab;$$

I. 5. Если  $a$  и  $b$  суть произвольныя данныя числа и  $a$  не есть  $0$ , то существуетъ всегда одно и только одно число  $x$  и также одно и только одно  $y$  такъ-что:

$$ax = b \text{ и } ya = b.$$

I. 6. Существуетъ определенное число — обозначаемъ его  $1$  — такъ-что для каждаго  $a$  одновременно:

$$a \cdot 1 = a \text{ и } 1 \cdot a = a.$$

## II. Аксиомы счета.

Если  $a$ ,  $b$ ,  $c$  суть произвольныя числа, то всегда имѣютъ мѣсто слѣдующія формулы:

$$\text{II. 1. } a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\text{II. 2. } a + b = b + a$$

$$\text{II. 3. } a(bc) = (ab)c$$

$$\text{II. 4. } a(b + c) = ab + ac$$

$$\text{II. 5. } (a + b)c = ac + bc$$

$$\text{II. 6. } ab = ba.$$

## III. Аксиомы порядка.

III. 1. Если  $a$ ,  $b$  суть какія-нибудь два различныя числа, то всегда одно определенное изъ нихъ (нпр.  $a$ ) боль-

ше ( $>$ ) чѣмъ другое. Это послѣднее называется тогда *меньшимъ*: это обозначается:

$$a > b \text{ и } b < a$$

III. 2. Если  $a > b$  и  $b > c$ , то и  $a > c$ .

III. 3. Если  $a > b$ , то всегда и

$$a + c > b + c \text{ и } c - a > c - b.$$

III. 4. Если  $a > b$  и  $c > 0$ , то всегда и

$$ac > bc \text{ и } ca > cb.$$

#### IV. Аксиомы непрерывности.

IV. 1. (*Архимедова аксіома*). Если  $a > 0$  и  $b > 0$  суть два произвольныя числа, то всегдѣ возможно сложить  $a$  достаточно много разъ, что соответствующая сумма будетъ имѣть свойство:

$$a + a + a + \dots + a > b.$$

IV. 2. (*Аксиома полноты*). Невозможно присоединить къ системѣ чиселъ другую систему вещей такъ-чтобъ и въ новой системѣ полученной отъ соединенія имѣли мѣсто сполна всѣ аксіомы: I, II, III, IV 1; или короче говоря: числа составляютъ систему вещей, которая при условіи удовлетворенія всѣхъ аксіомъ уже не можетъ быть болѣе расширена.

Нѣкоторыя изъ аксіомъ I 1—6, II 1—6, III 1—4, IV 1—2 суть слѣдствія другихъ, и такимъ образомъ является задача развить логическую зависимость этихъ аксіомъ. Для изслѣдованія началъ арифметики эта задача доставляетъ много новыхъ и плодотворныхъ точекъ зрѣнія. Мы встрѣчаемся напр. съ слѣдующими фактами:

Существованіе числа 0 (аксіома I 3) есть слѣдствіе аксіомъ I 1, 2 и II 1; оно основывается такимъ образомъ существенно на ассоціативномъ законѣ сложенія.

Существованіе числа 1 (аксіома I 6) есть слѣдствіе аксіомъ I 4, 5 и II 3; оно основывается такимъ образомъ существенно на ассоціативномъ законѣ умноженія.

Коммутативный законъ сложения (аксіома II 2) есть слѣдствіе аксіомъ I, II 1, 4, 5; онъ есть также слѣдствіе ассоціативнаго закона сложения и обоихъ дистрибутивныхъ законовъ.

*Доказательство.* Имѣемъ:

$$\begin{aligned}(a+b)(1+1) &= (a+b)1 + (a+b)1 = a+b+a+b \\ &= a(1+1) + b(1+1) = a+a+b+b; \\ b+a &= a+b.\end{aligned}$$

Коммутативный законъ умноженія (аксіома II 6) есть слѣдствіе аксіомъ I, II 1—5, III, IV 1, но уже не вытекаетъ изъ аксіомъ I, II 1—5, III; этотъ законъ можетъ быть выведенъ изъ прочихъ аксіомъ тогда и только тогда, когда въ число ихъ входитъ аксіома Архимеда (IV 1). Этотъ фактъ имѣетъ особенное значеніе для основаній геометріи(\*).

Аксіомы IV 1 и IV 2 независимы одна отъ другой; онѣ не содержатъ никакого утвержденія относительно понятія о сходимости или существованія предѣла, и однако изъ нихъ слѣдуетъ, какъ можно показать, теорема Больцано о существованіи точки сгущенія (Verdichtungsstelle). Мы находимъ такимъ образомъ полное совпаденіе нашей системы чиселъ и обыкновенной системы вещественныхъ чиселъ.

Для доказательства отсутствія противорѣчія выставленныхъ аксіомъ, необходимо соответствующее видоизмѣненіе извѣстныхъ методовъ заключенія. Въ этомъ доказательствѣ я усматриваю вмѣстѣ съ тѣмъ доказательство существованія понятія вещественныхъ чиселъ или — употребляя выраженія Г. Кантора — доказательство того, что система дѣйствительныхъ чиселъ есть существующая множественность (consistente Menge).

Тѣ возраженія, которыя дѣлаются противъ существованія совокупности всѣхъ вещественныхъ чиселъ и безконечныхъ множественностей, теряютъ при нашемъ взглядѣ всякое основаніе: подъ множественностью вещественныхъ чиселъ мы должны мыслить не совокупность всѣхъ возможныхъ законовъ, по которымъ могутъ идти элементы основнаго ряда, но напротивъ — какъ это было сейчасъ указано — систему вещей, которыхъ взаимныя отношенія даны вышеприведенною *конечною* и *замкнутою* системою аксіомъ I—IV; для этой системы новыя утвержденія только тогда

<sup>1)</sup> Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Kap. VI.

имѣютъ значеніе, если они могутъ быть выведены изъ аксіомъ посредствомъ конечнаго числа логическихъ заключеній.

Если - бы мы подобнымъ же образомъ хотѣли дать доказательство существованія совокупности всѣхъ мощностей (или всѣхъ канторовскихъ Алефовъ) то эта попытка не удалась-бы: дѣйствительно совокупность всѣхъ мощностей не существуетъ или — говоря терминами Г. Кантора—совокупность всѣхъ мощностей есть не существующая множественность.

ПОДПИСНА НА 1900 ГОДЪ  
НА ЕЖЕМЪСЯЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКІЙ ЖУРНАЛЬ

# „ЗАПИСКИ“

## „ИМПЕРАТОРСКАГО РУССКАГО ТЕХНИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА“.

(ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ГОДЪ ИЗДАНІЯ).

### ПРОГРАММА ЖУРНАЛА:

*Дѣятельность Общества:* Журналы Общихъ Собраній Общества и засѣданій Совѣта Общества и его отдѣловъ: I-го—Химическаго, II-го—Механическаго, III-го—Строительнаго, IV-го—Военно-морского, V-го—Фотографическаго, VI-го—Электротехническаго, VII-го—Желѣзнодорожнаго, IX-го—По Техническому образованію. Журналы засѣданій иногородныхъ отдѣленій Общества, доставляемые въ Редакцію. Годовые отчеты о дѣятельности Общества и его иногородныхъ отдѣленій. *Труды Общества:* Доклады, читанные въ засѣданіяхъ Общества, и работы его членовъ. *Техническая Литература:* Статьи и новости по различнымъ отраслямъ техники. *Библиографія.* *Правительственные распоряженія* имѣющія отношеніе къ технике и технической промышленности. *Обзоръ привилегій,* выдаваемыхъ въ Россіи: наиболѣе замѣчательныя и интересныя изъ нихъ помѣщаются въ подробномъ изложеніи, съ чертежами, а изъ прочихъ—извлекается сущность предмета каждой привилегіи. Указатели продленія сроковъ и прекращенія привилегій, а также испрашиваемыхъ привилегій, на которыя выданы охранительныя свидѣтельства, и уничтоженныхъ охранительныхъ свидѣтельствъ. Записки И. Р. Т. О. составляютъ единственный органъ, въ которомъ сгруппированы вмѣстѣ всѣ означенныя свѣдѣнія о привилегіяхъ.

Изъ изложенной программы видно, что главная цѣль журнала—служить органомъ дѣятельности И. Р. Т. О. и трудовъ его членовъ. Приложение вышеупомянутаго Обзора привилегій придаетъ этому органу интересъ—веркала техническихъ успѣховъ и изобрѣтательности въ Россіи.

| ПОДПИСНАЯ ЦѢНА:      | Съ доставкой<br>и пересылкой. | Съ пересылкой<br>за границу. |
|----------------------|-------------------------------|------------------------------|
| На годъ . . . . .    | 12 руб.                       | 16 руб.                      |
| На полгода . . . . . | 7 „                           | 9 „                          |

Подписка принимается въ Редакціи: С.-Петербургъ, Пантелеймонская, № 2, и у книгопродавцевъ. Гг. иногородные благоволятъ обращаться преимущественно въ Редакцію.

«Записки Императорскаго Русскаго Техническаго Общества» за прежніе годы можно приобрѣтать въ Редакціи. Съ 1867 по 1887 г. по 4 р., за послѣдующіе годы по 8 р. за годъ; за отдѣльный выпускъ 1 р. 50 к. За текущій и

предшествующій ему году по 12 р. за годъ и по 1 р. за выпускъ. За 28 лѣтъ (1867, 1869—83, 1886—87 и 1889—98) цѣна въ сложности опредѣлена въ 100 руб. съ доставкой и пересылкой, а для школьных, общественныхъ и частныхъ библиотекъ 60 р. За годы 1868, 1884, 1885 и 1888 «Записки» не разошлись.

### ТАРИФЪ ЗА ОБЪЯВЛЕНІЯ.

За 1 годъ.      За  $\frac{1}{2}$  года.      За 3 мѣс.      За 1 мѣс.

1 страница впереди текста.

100 руб.      60 руб.      35 руб.      15 руб.

$\frac{1}{2}$  страницы впереди текста или 1 страница позади текста.

60 руб.      35 руб.      20 руб.      9 руб.

$\frac{1}{2}$  страницы позади текста.

35 руб.      20 руб.      12 руб.      5 руб.

Обложка и исключительныя страницы по соглашенію.

Вкладыя за 1000 шт (до 1 листа въса каждое) 15 руб. Со вкладкою въ текстъ 20 руб.

За каждое измѣненіе въ текстъ годовыхъ, полугодовыхъ и трехмѣсячныхъ объявленій по 5 рублей.

Деньги при заказѣ объявленій уплачиваются впередъ.

Редакторъ А. Н. Сигуновъ.

### ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПСКА на состоящій изъ 12 номеровъ

1 томъ (2-ая серія) ученаго и критико-библіографическаго  
журнала

### ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКІЯ НАУКИ

ВЪ ХОДѢ ИХЪ РАЗВИТІЯ,

выходящаго не менѣе трехъ разъ въ годъ безсрочными нумерами въ размѣрѣ не менѣе двухъ листовъ въ каждомъ при слѣдующей программѣ:

1) Статьи по исторіи и философіи физико-математическихъ наукъ.

2) Матеріали и статьи по исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи.

3) Біографіи ученыхъ.

4) Статьи по методологіи и преподаванію физико-математическихъ наукъ.

5) Отчеты и критическія статьи о новыхъ книгахъ и журнальныхъ статьяхъ по физико-математическимъ наукамъ.

6) Статьи по древней и новой библіографіи физико-математическихъ наукъ.

7) Библіографическій указатель выходящихъ въ свѣтъ книгъ и журнальныхъ статей по физико-математическимъ наукамъ какъ русскихъ, такъ и иностранныхъ.

8) Объявленія.

**ПОДПИСНАЯ ЦѢНА НА ТОМЪ СЪ ПЕРЕСЫЛКОЙ И ДОСТАВКОЙ ШЕСТЬ РУБЛЕЙ.**

Подписка принимается: въ Редакціи журнала „Физико-Математическія Науки“ (Москва, адресъ извѣстенъ Почтамту).

Оставшіеся отъ подписки экземпляры первыхъ *шести* томовъ (съ 1885 года) журнала „Физико-Математическія Науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ“ можно выписывать изъ Редакціи по пяти рублей за каждый томъ съ пересылкою и доставкою, а экземпляры слѣдующихъ *семи* томовъ — на тѣхъ же условіяхъ, по *шести* рублей за томъ.



ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1900 г. (VII г. изд.)

**НА ЕЖЕМѢСЯЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ**

# **„НАУЧНОЕ ОБОЗРѢНІЕ“.**

Изданіе П. П. Сойкина. подъ редакціею д-ра философіи М. М. Филиппова.

Подписная цѣна: на годъ 7 руб. (за границу 10 руб.) съ доставкою и перес., допускается разсрочка: при подпискѣ 2 руб., къ 1 апрѣля 2 руб. и къ 1 іюля остальные; комплекты за 1899 годъ, ц. 7 рублей.

Главная контора журнала: С.-Петербургъ Стремянная ул. собств. д. № 12.



ОБЪ ИЗДАНИИ

# ЗАПИСОКЪ

МОСКОВСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ.

Императорскаго Русскаго Техническаго Общества.  
(Десять выпусковъ въ годъ).

Подписная цѣна „Записокъ“:

За годъ съ пересылкой и доставкой 4 р., за полгода 3 р.; безъ пересылки и доставки за 4 р. 50 к., за полгода 2 р. 50 к.

Подписка принимается въ редакціи Записокъ: Москва, Ваганьковскій пер., реальное училище К. К. Мазинга.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА

на журналъ

## „ВОПРОСЫ ФИЛОСОФІИ И ПСИХОЛОГІИ“

Изданіе Московскаго Психологическаго Общества, при содѣйствіи С.-Петербургскаго Философскаго Общества.

Журналъ выходитъ пять разъ въ годъ (приблизительно въ концѣ февраля, апрѣля, іюня, октября и декабря) книгами не менѣе 15 печатныхъ листовъ.

Условія подписки: На годъ (съ 1-го января 1900 года по 1-ею января 1901 г.) безъ доставки—6 р., съ доставкой въ Москвѣ—6 р. 50 к., съ пересылкой въ другіе города—7 р. за границу—8 р.



**Изданія Физико-математическаго Общества и физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ**

1) Собраніе протоколовъ засѣданій секціи Физико-математич. наукъ Общ. Естеств. при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ (т. 1-й распроданъ; цѣна томовъ 2—8 съ портретами Н. И. Лобачевского, М. А. Ковальскаго, П. И. Котельникова и И. С. Громеки—7 р.).

2—4 Брошюры «М. А. Ковальскій» «П. И. Котельниковъ» «И. С. Громека» съ кабинетн. порт. по 60 к.

5) Уставъ Физико-математическаго Общества Ц. 5 к.

6) Каталогъ библіотеки секціи; ц. 25 к.

7) Счетъ и измѣреніе—Гельмгольца. Понятіе о числѣ—Кронекера переводъ проф. А. Васильева. Ц. 50 к.

8) Систем. указатель книгъ и статей по чистой и приклад. математикѣ, напечатанныхъ въ Казани, сост. Д. М. Синцовъ. Ц. 25 к.

9) Вейерштрассъ. О Лудольфовомъ числѣ (доказательство невозможности квадратуры круга) пер. И. А. Скалозубова подъ ред. проф. А. Васильева. Ц. 30 к.

10—11 Конспекты публичныхъ лекцій, устроенныхъ Физико-Математическимъ Обществомъ весною 1895 г. (Ц. 30 к.) и весною 1896 г. (ц. 20 к.).

12) Ф. Клейнъ. Сравнительное обозрѣніе новѣйшихъ геометрическихъ изслѣдованій. Пер. Д. Синцовъ. Цѣна 35 к.

13) Торжество открытія памятника Н. И. Лобачевского 1 Сент. 1896 г. Ц. съ фототипіей памятника 25 к., безъ фот. 15 к.

14) Первое присужденіе преміи Н. И. Лобачевского въ 1897 г. Ц. 50 к.

15) **F. Klein.** Zur ersten Vertheilung des Lobatschewsky—Preises. Цѣна 50 коп.

16) In memoriam N. I. Lobatchevskii. (Collection des mémoires présentées à la Société Ph.-M. de Kasan par Hermite, Halsted, Girardville, Laisant, Lemoine, Neuberg et Ocagne. Prix 8 fr. (ц. 3 руб.).

17) **Ch. Hermite.** Sur quelques développements en serie de la théorie des fonctions elliptiques. 1897. Prix 2 f. (цѣна 75 к.).

18) **E. Lemoine.** Géométrie. Transformation continue dans le triangle et dans la tétraèdre. 1897. Prix 3 fr. (цѣна 1 р.).

19) **Ф. Клейнъ.** Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи. Пер. Н. Н. Парфентьева подъ ред. Д. М. Синцова. 1898 г. Ц. 75 к.

20) **Д. М. Синцовъ.** Bibliographia mathematica rossica. Списокъ книгъ и статей по чистой математикѣ, напеч. въ Россіи—за 1896 г. Ц. 20 к. То же за 1897 г. Ц. 20 к. То же за 1898 г. Ц. 20 к.

21) **Pl Poretzky.** Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques. Ц. 1 р.

22) Памяти Софуса Ли (сост. Д. М. Синцовъ). 1899 г. Ц. 30 к.

23) **И. И. Аристовъ.** Объ итерациіи функцій. 1900 г. ц. 50 к.

Продаются въ книжныхъ магазинахъ въ Казани и выписываются отъ казначея Общества **М. А. Грачева** (Университетъ). Выписывающіе отъ казначея за пересылку не платятъ. Отъ него-же можно выписывать: (вырученные отъ продажи деньги поступаютъ въ фондъ имени Н. И. Лобачевского):

*Г. Семикольновъ. Этюды по геометріи Лобачевского.*

Эт. I-й (теорема Пифагора въ геометріи Лобачевского). Ц. 1 р.

Эт. II-й (Объ измѣреніи площадей фигуръ). Ц. 1 р.

*Празднованіе столѣтней годовщины дня рожденія Н. И. Лобачевского.* Изд. Императорскаго Казанскаго Университета (съ порт. Н. И. Лобачевского) ц. 1 р.

## **„ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА**

**ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.**

„Извѣстія“, издаваемые подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ четырехъ до шести въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20-ти листовъ.

«Извѣстія» раздѣляются на два отдѣла.

1) Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ Общества.

2) Второй отдѣлъ содержитъ:

а) Лѣтопись Физико-математическаго Общества (протоколы засѣданій, извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годовыя отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ бібліотеку Общества и т. п.).

б) Библіографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и заграницею сочиненіяхъ по физико-математическимъ наукамъ. Научныя новости.

в) Задачи и вопросы, предлагаемые для рѣшенія, и рѣшенія ихъ.

Въ «Извѣстіяхъ» могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библіографическія и другія, имѣющія отношеніе къ физико-математическимъ наукамъ.

Члены Физико-математическаго Общества пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предѣлающій годъ, получаютъ Извѣстія бесплатно.

Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „ИЗВѢСТІЯ“ въ годъ 3 р. (съ доставкой и пересылкою).

Подписка принимается предсѣдателемъ Физико-математическаго Общества проф. А. В. Васильевымъ, секретаремъ Общества проф. В. А. Ульянинымъ (Университетъ) и казначеемъ Общества М. А. Грачевымъ (Университетъ), въ Казани книжными магазинами А. А. Дубровина (Гостинный дворъ № 1) и Н. Я. Вашихова (Воскресенская, городской пассажъ), а также всеми извѣстными книжными магазинами.

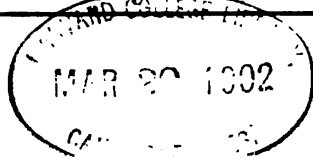
Первую серію „Извѣстій“ составляютъ восемь томовъ „Собранія протоколовъ засѣданій секцій физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ“.

---

Δ  
Sci. 1105.1  
(Add. on shelf)

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE  
de Kasan.

Deuxième série, Tome X. № 3.



ИЗВѢСТІЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ X.

№ 3.

КАЗАНЬ.

Типо-литографія Императорскаго Университета.  
1901.

# СОДЕРЖАНІЕ.

## I.

**P. S. Poretzky.** Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques.

**Д. А. Гольдгаммеръ.** О давленіи свѣтовыхъ лучей.

**D. Seiliger.** Sur un problème de géométrie.

## II.

**Лѣтопись Физико-Математическаго Общества.**

Протоколы, 97—100 засѣданій Ф.—М. Общества.

**Д. Синцовъ.** Bibliographia mathematica rossica (1899).

**Гурвицъ.** Задача изопериметровъ.

**Пуанкаре.** Новая форма уравненій Механики.

## Table des matières.

**P. S. Poretzky.** Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques.

**D. A. Goldhammer.** Pression des rayons de lumière.

Procès-verbaux de séance 97—100 de la Société Physico-mathématique.

**D. Sintsof.** Bibliographia mathematica rossica (1899).

**Hourwitz.** Problème des isoperimètres.

**Poincaré.** Nouvelle forme des équations de mécanique.

---

5 BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE  
de Kasan.

Deuxième série. Tome X. № 3.

---

*Kazan, Russia - Univ. - Fizio - matematicheskoe obshchestvo.*

# ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

---

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ X.

№ 3.



КАЗАНЬ.

Типо-литографія Императорскаго Университета.

1901.

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества  
при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ.*

## Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques.

(Supplément au traité «Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques»).

### Chapitre LVII.

*Second supplément à la théorie des racines: sur les coup-  
les des déterminations équiracinales.*

Nous savons que toutes les racines de  $a$  pour la détermination bipartible

$$a = aX + a_0Y, \dots \quad (1)$$

où  $X$  et  $Y$  sont les fonctions indépendantes de la lettre  $a$ ,  
sont renfermées dans la formule

$$a = XY + \xi(X_0Y + XY_0), \dots \quad (2)$$

où  $\xi$  est une classe arbitraire.

Il est évident que la même formule (2) exprime aussi  
toutes les racines de  $a$  pour la détermination bipartible:

$$a = aY + a_0X, \dots \quad (3)$$

qui se déduit de la détermination (1) par la simple permutation des coefficients de  $a$  et de  $a_0$ .

Voilà pourquoi nous pouvons dire que les deux formules (1) et (3) présentent un couple des *déterminations équiracinales*. Pour ces deux déterminations le nombre et les valeurs de toutes les racines de  $a$  sont parfaitement les mêmes.

La seule différence entre les racines de ces deux déterminations consiste dans ce qui suit: les nombres des minimaux des fonctions  $X_0Y$  et  $XY_0$  étant  $i$  et  $k$ , toutes les  $2^{i+k}$  racines de ces déterminations se divisent: 1°, pour l'égalité (1) dans le nombre  $2^k$  des groupes des racines égales les unes aux autres grâce à cette égalité (1) et 2°, pour l'égalité (3) dans le nombre  $2^i$  des groupes des racines égales les unes aux autres grâce à cette égalité (3).

Cela nous permet de dire à propos et généralement que pour chaque détermination donnée  $a=aX+a_0Y$  toutes les racines de  $a$  se divisent: 1°, dans les  $2^k$  groupes des racines égales grâce à cette détermination et 2°, dans les  $2^i$  groupes des racines égales grâce à la détermination (3) qui est équiracinale avec la même détermination donnée.

Pour les valeurs  $X=P+Q, Y=P$  les trois formules (1), (2) et (3) se transforment dans les formules suivantes:

$$a=P+aQ=P+aP_0Q, \dots \quad (1^*)$$

$$a=P+\xi Q=P+\xi P_0Q, \dots \quad (2^*)$$

$$a=P+a_0Q=P+a_0P_0Q, \dots \quad (3^*)$$

qui nous montrent que la détermination *intermédiaire*  $a=P+aQ$  et la détermination *coéquivalente*  $a=P+a_0Q$  sont toujours les déterminations équiracinales et que toutes leurs racines se renferment dans la formule  $a=P+\xi Q=P+\xi P_0Q$ .

Nous savons que: 1°, toutes les racines de chaque dé-



termination intermédiaire sont inégales les unes aux autres grâce à cette détermination et  $2^\circ$ , toutes les racines de chaque détermination coéquivalente sont, au contraire, égales les unes aux autres grâce à cette détermination. A présent, vu que chaque détermination intermédiaire (1\*) a les mêmes racines que la détermination coéquivalente (3\*), nous pouvons dire généralement que toutes les racines de chaque détermination intermédiaire  $a=F+aQ$ , étant inégales grâce à cette détermination, sont toujours égales les unes aux autres grâce à la détermination coéquivalente  $a=P+a_0Q$  qui est équiracinale avec la détermination donnée intermédiaire.

Pour la valeur  $P=0$  les formules (1\*), (2\*) et (3\*) deviennent:

$$a=aQ, a=\xi Q, a=a_0Q, \dots \quad (4)$$

d'où nous voyons que la détermination de subordination partielle  $a=aQ$  et la détermination de supériorité excessive  $a=a_0Q$  sont toujours équiracinales et que toutes leurs racines se renferment dans la formule  $a=\xi Q$ .

En conservant la valeur  $P=0$  et en supposant que  $Q=E$ , où  $E$  est l'un des éléments de compréhension du discours, c'est à dire l'un de ses maximaux, les trois égalités (4) se transforment ainsi:

$$a=aE, a=\xi E, a=a_0E, \dots \quad (4)$$

Cela désigne que l'égalité élémentaire  $a=aE$  appartenante au nombre des éléments de compréhension des égalités et l'égalité élémentaire  $a=a_0E$  appartenante au nombre des éléments d'extension des égalités sont toujours équiracinales et que toutes leurs racines se renferment dans la formule  $a=\xi E$ .

Revenons aux trois égalités (1\*), (2\*) et (3\*). Pour la valeur  $Q=1$  ces trois égalités deviennent:

$$a=a+P, a=\xi+P, a=a_0+P \dots \quad (6)$$

D'où nous concluons que la détermination de supériorité partielle  $a=a+P$  et la détermination de subordination excessive  $a=a_0+P$  sont toujours équiraciales et que toutes leurs racines se renferment dans la formule  $a=\xi+P$ .

En conservant la valeur  $Q=1$  et en supposant que  $P=e$ , où  $e$  est l'un des éléments d'extension du discours, c'est à dire l'un de ses minimaux, les trois égalités (6) nous donneront:

$$a=a+e, a=\xi+e, a=a_0+e \dots \quad (7)$$

Donc: 1°, l'égalité élémentaire  $a=a+e$  appartenante au nombre des éléments de compréhension des égalités et l'égalité élémentaire  $a=a_0+e$  appartenante au nombre des éléments d'extension des égalités sont toujours équiraciales et 2°, toutes leurs racines sont renfermées dans le schème  $a=\xi+e$ .

Ce qui est dit plus haut nous permet de réduire la recherche des racines des déterminations coéquivalentes (et des éléments d'extension des égalités) à la recherche des racines des déterminations intermédiaires (et des éléments de compréhension des égalités).

*Exemple.* Les racines de  $a$  pour l'élément de supériorité excessive  $a=a_0 (b+c_0)$  doivent être:

$$0, b, c_0, bc, bc_0, b_0c_0, bc+b_0c_0, b+c_0,$$

car ce sont (voyez le chapitre VIII) les racines de  $a$  pour l'élément de subordination partielle  $a=a(b+c_0)$ .

*Exemple 2.* Dans le même chapitre VIII j'ai montré que

les racines de  $a$  pour l'élément de supériorité partielle  $a = a + b_0 c$  sont:

$$b_0 c, b_0, c, b + c, e_0 + b, b_0 + c_0, bc_0 + b_0 c, 1.$$

S'il en est ainsi, les mêmes huit classes doivent être aussi les racines de  $a$  pour l'élément de subordination excessive  $a = a_0 + b_0 c$ .

Dans le même chapitre VIII j'ai démontré que, parmi toutes les égalités exprimées à l'aide de  $n$  lettres, les égalités élémentaires ont le plus grand nombre des racines pour chaque de ses classes simples et que ce nombre est  $2^{n-1}$ . A présent nous savons que cette vérité, démontrée pour les éléments de compréhension des égalités, doit se rapporter aussi aux éléments d'extension des égalités.

Enfin dans le même chapitre VIII j'ai montré que les racines de chaque détermination intermédiaire sont les racines communes à tous ses éléments de compréhension. Ici je veux illustrer par un simple exemple que les racines de chaque détermination coéquivalente sont les racines communes à tous ses éléments d'extension.

*Exemple.* La détermination coéquivalente

$$a = b + a_0 e$$

a les deux racines de  $a$  qui sont

$$a = b, a = b + c$$

et les trois éléments d'extension, nommément:

$$a = a_0(b + c), a = a_0 + bc, a = a_0 + bc_0.$$

Chacun de ces éléments a les huit racines de  $a$ , savoir:

$$1) 0, b, c, bc, bc_0, b_0 c, bc_0 + b_0 c, b + c;$$

$$2) \ bc, b, c, b+c, b+c_0, b_0+c, bc+b_0c_0, 1;$$

$$3) \ bc_0, b, c_0, b+c_0, b+c, b_0+c_0, bc_0+b_0c, 1.$$

Les racines communes à tous ces trois éléments sont évidemment  $b$  et  $b+c$ , c'est à dire les mêmes que pour la détermination donnée.

Pour terminer ce chapitre, disons encore ce qui suit. Il ne faut pas oublier que chaque racine d'une détermination intermédiaire lui satisfait identiquement, tandis que la racine d'une détermination coéquivalente (et généralement d'une détermination non-intermédiaire) de la classe simple quelconque  $a$  transforme cette détermination dans le résultat complet d'élimination de la lettre  $a$ . Par exemple, la substitution de  $b$  au lieu de  $a$  et de  $b_0$  au lieu de  $a_0$  dans la détermination intermédiaire  $a=b+ac$  nous donne l'identité  $b=b+bc=b$ , tandis que les mêmes substitutions faites dans la détermination coéquivalente  $a=b+a_0c$  nous donneront l'égalité  $b=b+c$  qui n'est autre chose que le résultat d'élimination de  $a$  dans cette dernière détermination.

## Chapitre LVIII.

*Sur les racines absolues. Démontrer que chaque cause élémentaire d'une égalité est un système des racines absolues pour toutes ses classes simples.*

Nous ne considérons partout que les racines des classes simples. Peut être, les fonctions ont aussi leurs racines,—je laisse cette question sans discussion. Je ne discuterai pas aussi la question sur les systèmes des racines de quelques classes simples à la fois. Pour terminer la théorie des racines, je ne parlerai encore que des systèmes des racines absolues et de l'équivalence de ces systèmes aux éléments d'extension des égalités ou, ce qui est la même chose, aux causes élémentaires des égalités.

Soit donnée une égalité quelconque  $A=B$  exprimée à l'aide de  $n$  lettres  $a, b, c, d, \dots$ . Convenons de dire que nous avons trouvé l'un des *systèmes des racines absolues* de cette égalité, si elle se transforme dans l'identité  $1=1$  ou  $0=0$  à l'aide de substitution de l'une de deux valeurs 1 et 0 au lieu de chacune de ses  $n$  lettres. Par exemple, vu que les valeurs  $x=1, a=0, b=1$  transforment l'égalité de M. Schröder  $0=ax+bx_0$  dans l'identité  $0=0$ , nous pouvons dire que l'un des systèmes des racines absolues de cette égalité est  $(x=1, a=0, b=1)$ . Un autre exemple: le système  $(a=1, b=1)$  est l'un des systèmes des racines absolues pour l'égalité  $a=ab$ , car les valeurs  $a=1, b=1$  transforment cette égalité dans l'identité  $1=1$ .

Démontrons que chaque système des racines absolues de chaque égalité donnée est toujours équivalent à l'un des éléments d'extension de cette égalité ou, ce qui est la même chose, à l'une de ses causes élémentaires, et réciproquement: chaque élément d'extension de l'égalité est équivalent à l'un de ses systèmes des racines absolues. Nous démontrerons les deux parties de ce théorème séparément. Pour plus de simplicité je supposerai que le nombre  $n$  des lettres de l'égalité donnée  $A=B$  ou  $M=1$  est égal à 3 et que ces lettres sont  $a, b, c$ . Les jugements faits dans ce cas particulier peuvent être étendus facilement au cas le plus général.

1°, Supposons que l'un des minimaux de la fonction  $M$  est  $a_0b_0c$ . S'il en est ainsi, l'égalité  $1=a_0b_0c$  doit être, comme nous le savons bien, l'un des éléments d'extension pour l'égalité donnée  $1=M(a, b, c)$ , l'une des ses causes élémentaires. Sans doute, la substitution de l'unité au lieu du minimal  $a_0b_0c$  transforme identiquement dans l'unité la fonction  $M$  décomposée dans ses minimaux, c'est à dire qu'elle transforme dans l'identité  $1=1$  l'égalité donnée  $1=M$ . Mais l'égalité  $1=a_0b_0c$

est équivalente au système  $(a_0=1, b_0=1, c=1)$  et par conséquent aussi au système  $(a=0, b=0, c=1)$ . Evidemment les substitutions  $a=0, b=0, c=1$  transforment dans l'identité l'élément  $a_0b_0c=1$  et par conséquent aussi, comme cela est démontré plus haut, l'égalité donnée  $1=M$ . Donc le système  $(a=0, b=0, c=1)$  est l'un des systèmes des racines absolues pour l'égalité donnée, et nous pouvons dire généralement que chaque cause élémentaire de chaque égalité est toujours équivalente à l'un des systèmes des racines absolues pour cette égalité.

2°, Supposons que pour l'égalité donnée  $1=M(a, b, c)$  l'un des systèmes des racines absolues est  $(a=1, b=0, c=1)$ . Cela désigne que l'égalité  $1=M(1, 0, 1)$  est une identité  $1=1$ . Mais le système mentionné peut être transformé ainsi:

$$(a=1, b=0, c=1)=(a=1, b_0=1, c=1)=(ab_0c=1).$$

Donc, le système donné des racines absolues est équivalent à l'égalité de la sorte: l'un des minimaux du discours est égal à l'unité, c'est à dire à l'égalité élémentaire appartenante au nombre des éléments d'extension des égalités ou, ce qui est la même chose, au nombre des causes élémentaires des égalités. Vu que l'égalité élémentaire  $ab_0c=1$ , étant équivalente au système donné des racines absolues, transforme dans l'identité l'égalité donnée  $M=1$  développée dans ses minimaux, ces deux égalités sont liées l'une avec l'autre tellement que la première est l'un des éléments d'extension pour la seconde, l'une de ses causes élémentaires. Cela nous donne le droit de dire généralement que chaque système des racines absolues de chaque égalité est toujours équivalent à l'une des causes élémentaires de cette égalité, et toutes les deux parties du théorème énoncé plus haut sont démontrées totalement.

Il est clair à présent que si le nombre des éléments de compréhension de l'égalité donnée est  $m$  et le nombre de toutes ses lettres est  $n$ , alors le nombre total de tous les systèmes de ses racines absolues doit s'égaliser à  $2^n - m$ .

*Exemple.* Nous savons que pour l'égalité de M. Schröder  $0 = ax + bx_0$  les nombres  $n$  et  $m$  sont respectivement 3 et 4. Donc le nombre de tous les systèmes de ses racines absolues doit s'égaliser à  $2^3 - 4 = 4$ . Vu que cette égalité est équivalente à l'égalité:

$$1 = a_0x + b_0x_0 = a_0bx + a_0b_0x + ab_0x_0 + a_0b_0x_0,$$

tous ses quatre éléments d'extension sont:

$$1 = a_0bx, \quad 1 = a_0b_0x, \quad 1 = ab_0x_0, \quad 1 = a_0b_0x_0$$

et tous les quatre systèmes de ses racines absolues seront:

$$(a=0, b=1, x=1), (a=0, b=0, x=1), (a=1, b=0, x=0), \\ (a=0, b=0, x=0).$$

## Chapitre LIX.

*Les subsomptions et les supersomptions logiques. Les formes de la subsomption  $A < B$  et de la supersomption  $C > D$ . La loi de transformation d'une subsomption dans les égalités. La loi de transformation d'une égalité dans les subsomptions. Quelques propositions spéciales.*

Nous savons que la détermination de subordination „la classe A est contenue dans la classe B“ s'exprime par l'égalité  $A = AB$ . Sans doute, l'expression symbolique de cette détermination sera simplifiée, si nous convenons d'employer ici, au lieu du signe  $=$ , le signe spécial correspondant aux mots „est contenue dans“. Alors la présence du symbole A dans le membre droit de la formule qui doit remplacer l'égalité  $A = AB$  devient tout à fait superflue.

A tous les signes qui étaient proposés dans ce but je préfère le signe simple et naturel  $<$  qui doit exprimer non le mot „moins“ mais les mots „est contenue dans“, ou encore „est une sousclasse de“, ou enfin simplement le mot „est“. Ainsi désormais nous pouvons exprimer la détermination de subordination  $A=AB$  par la formule  $A<B$ .

Pareillement la détermination de supériorité  $C=C+D$  peut être exprimée par le schème plus simple  $C>D$ , si nous convenons de lire le signe  $>$  comme le mot „contient“, ou encore comme les mots „est une superclasse de“.

Convenons de nommer chaque relation entre les classes exprimée à l'aide du signe  $<$  par le terme usité *subsomption* et chaque relation exprimée à l'aide du signe  $>$  par le terme *supersomption*.

Sans doute, la subsomption  $A<B$  doit être équivalente à la supersomption  $B>A$  et la supersomption  $C>D$  doit être équivalente à la subsomption  $D<C$ .

Désormais nous avons les formules vraies:

$$(A=AB)=(A<B)=(B>A),$$

$$(C=C+D)=(C>D)=(D<C).$$

Vu que chacune classe est l'une de ses propres sousclasses et en même temps l'une de ses propres superclasses, les formules  $A<A$  et  $A>A$  ne sont pas absurdes et doivent correspondre aux égalités  $A=AA$  et  $A=A+A$ , c'est à dire aux identités. Cela nous donne les formules vraies:

$$(A<A)=(A=A), (A>A)=(A=A).$$

Nous savons que généralement:

$$(A=AB)=(0=AB_0)=(1=A_0+B),$$

$$(C=C+D)=(0=C_0D)=(1=C+D_0),$$



d'où nous concluons que les formules:

$$(A < B) = (0 = AB_0) = (1 = A_0 + B), \dots \quad (1)$$

$$(C > D) = (0 = C_0 D) = (1 = C + D_0), \dots \quad (2)$$

sont vraies. En vertu de ces formules nous avons:

$$(P < 0) = (0 = P_0) = (P = 1), \dots \quad (3)$$

$$(Q > 1) = (1 = Q + 1_0 = Q + 0) = (Q = 1), \dots \quad (4)$$

d'où nous voyons que les égalités  $P=0$  et  $Q=1$  peuvent être remplacées toujours par les subsomptions  $P < 0$  et  $1 < Q$ . Après cela les formules (1) et (2) deviennent:

$$(A < B) = (AB_0 < 0) = (1 < A_0 + B), \dots \quad (5)$$

$$(C > D) = (0 > C_0 D) = (C + D_0 > 1), \dots \quad (6)$$

A l'ensemble de ces formes de la subsomption  $A < B$  et de la supersomption  $C > D$  nous pouvons ajouter encore celles-ci:

$$(A < B) = (B_0 < A_0), \quad (C > D) = (D_0 > C_0),$$

comme cela suit des calculs:

$$(B_0 < A_0) = (0 = B_0 A) = (A < B),$$

$$(D_0 > C_0) = (0 = C_0 D) = (C > D).$$

En réunissant toutes les formules équivalentes, nous aurons les séries:

$$(A = AB) = (A < B) = (AB_0 < 0) = (1 < A_0 + B) = (B_0 < A_0), \dots \quad (7)$$

$$(C = C + D) = (C > D) = (0 > C_0 D) = (C + D_0 > 1) = (D_0 > C_0), \dots \quad (8)$$

qui renferment les quatre subsomptions et les quatre supersomptions auxquelles sont équivalentes respectivement l'égalité  $A = AB$  et l'égalité  $C = C + D$ :

Toutes ces formes de la subsumption  $A < B$  et de la supersomption  $C > D$  sont déjà connues dans la science. Mais ont-elles quelques autres formes? Pour répondre à cette question, il faut se rappeler que dans mon chapitre I sont données les formules (11) et (12) que nous pouvons présenter ainsi.

$$\begin{aligned} (A=AB) &= (B=B+A) = (A_0=A_0+B_0) = \\ &= (B_0=A_0B_0) = (0=AB_0) = (1=A_0+B) = \\ &= (A_0B=A_0B+AB_0) = (A+B_0=AB+A_0B_0) \dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (C=C+D) &= (D=CD) = (C_0=C_0D_0) = \\ &= (D_0=C_0+D_0) = (0=C_0D) = (1=C+D_0) = \\ &= (CD_0=CD_0+C_0D) = (C_0+D=CD+C_0D_0) \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Il suffit de transformer chacune des égalités de ces deux séries dans une subsumption ou dans une supersomption, et la question mentionnée sera résolue.

Il est aisé à voir que dans la chacune des égalités des séries (9) et (10) l'un de ses membres est la superclasse identique de l'autre. Cela désigne que chacune de ces égalités est de la sorte  $R=RS$ . Mais l'égalité  $R=RS$  est équivalente à l'égalité  $0=RS_0$  et la subsumption  $R < RS$  est aussi équivalente à la même égalité  $0=RS_0$ . Cela nous donne les deux formules vraies:

$$(R=RS) = (R < RS), \dots \quad (11)$$

$$(S=S+R) = (S > S+R) \dots \quad (12)$$

En appliquant la première de ces deux formules à toutes les égalités de la formule (9), nous recevrons la série

suivante des huit subsomptions équivalentes à l'égalité  $A=AB$  et par conséquent aussi à la subsomption  $A<B$ :

$$\begin{aligned} (A<AB) &= (A+B<B) = (A_0+B_0<A_0) = \\ &= (B_0<A_0B_0) = (AB_0<0) = (1<A_0+B) = \\ &= (AB_0+A_0B<A_0B) = (A+B_0<AB+A_0B_0) \dots (13) \end{aligned}$$

Vu que toutes les seize classes du discours de deux lettres  $A$  et  $B$  figurent dans ces huit subsomptions, nous pouvons dire que la série (13) embrasse toutes les formes principales différentes de la subsomption  $A<B$ .

Il peut sembler étrange que la subsomption considérée  $A<B$  ne se trouve pas elle-même dans la série (13). Cela s'explique ainsi: attendu que les trois égalités:

$$A=AB, A=A.AB, A=A(A_0+B)$$

ne présentent qu'une seule forme de l'égalité  $0=AB_0$ , les trois subsomptions:

$$A<B, A<AB, A<A_0+B$$

doivent être regardées comme les variations d'une seule forme de la même égalité  $0=AB_0$  et de la subsomption  $A<B$ . Donc la forme  $A<B$  est présentée dans la série (13) par sa variation  $A<AB$ .

En remplaçant dans la série (13) la subsomption  $A<AB$  par sa variation  $A<B$  et toutes les autres subsomptions par leurs variations correspondantes, nous aurons au lieu de la série (13) la série suivante:

$$\begin{aligned} (A<B) &= (A+B<A_0+B) = (A_0+B_0<A_0+B) = \\ &= (B_0<A_0) = (AB_0<0) = (1<A_0+B) = \\ &= (AB_0+A_0B<A_0+B) = (A+B_0<A_0+B) \dots (14) \end{aligned}$$

En remplaçant ici la subsomption  $A<B$  par sa varia-

tion  $A < A_0 + B$  et toutes les autres subsomptions par leurs variations correspondantes, nous aurons encore une série:

$$\begin{aligned} (A < A_0 + B) &= (A + B < A_0 + B) = (A_0 + B_0 < A_0 + B) = \\ &= (B_0 < A_0 + B) = (AB_0 < A_0 + B) = (1 < A_0 + B) = \\ &= (AB_0 + A_0 B < A_0 + B) = (A + B_0 < A_0 + B). \dots \quad (15) \end{aligned}$$

La série (15) nous montre que toutes les huit formes différentes de la subsomption  $A < B$  seront construites, quand nous exprimerons, que toutes les huit classes du discours qui ne sont pas les subclasses identiques de la fonction  $A_0 + B$  (du complet tout logique de la subsomption  $A < B$ ) sont les subclasses logiques de cette fonction.

Sans doute, nous devons recevoir encore une série des huit formes différentes de la même subsomption  $A < B$ , quand nous exprimerons que la fonction  $AB_0$  (le complet logique rien de la subsomption  $A < B$ ) est la subclasse logique de la chacune des huit classes du discours qui ne sont pas les superclasses identiques de cette fonction. Cela nous donne la série suivante des formes de la subsomption  $A < B$ :

$$\begin{aligned} (AB_0 < 0) &= (AB_0 < B) = (AB_0 < A_0) = \\ &= (AB_0 < AB) = (AB_0 < A_0 B) = (AB_0 < A_0 B_0) = \\ &= (AB_0 < A_0 + B) = (AB_0 < AB + A_0 B_0). \dots \quad (16) \end{aligned}$$

Voilà nous avons déjà le nombre 32 des subsomptions équivalentes à la subsomption  $A < B$  et nous savons que ce ne sont que les variations des huit formes différentes de cette subsomption.

Nous recevrons quelques variations ultérieures à l'aide de la considération suivante. Vu que les trois égalités:

$$B = B + A, \quad B = B + (A + B), \quad B = B + AB_0$$

ne présentent qu'une seule forme de l'égalité  $0=AB_0$ , les trois supersomptions

$$B>A, B>A+B, B>AB_0$$

et par conséquent aussi les trois subsomptions

$$A<B, A+B<B, AB_0<B$$

ne doivent présenter qu'une seule forme de la même égalité  $0=AB_0$ .

Disons à propos que les transformations précédentes nous permettent d'écrire les deux formules vraies:

$$(A<B)=(AB_0<A_0B),$$

$$(A<B)=(A+B_0<A_0+B)$$

qui montrent que la valeur logique de chaque subsomption  $A<B$  ne sera violée en rien: 1°, lorsque nous multiplierons son membre gauche par la négation de son membre droit et réciproquement et 2°, lorsque nous ajouterons à son membre gauche la négation de son membre droit et réciproquement.

Si les symboles  $A$  et  $B$  désignent les classes simples, les huit formes différentes présentées par chacune des séries (13), (14), (15) et (16) embrassent toutes les formes principales de la subsomption  $A<B$ . Mais si  $A$  et  $B$  désignent les classes composées, alors ce ne sont que quelques modèles de transformations des subsomptions.

Toutes les huit différentes formes principales de la supersomption  $C>D$  seront construites à l'aide de l'application de la formule (12) à toutes les huit égalités de la série (10). Nous aurons:

$$\begin{aligned} (C>C+D) &= (CD>D) = (C_0D_0>C_0) = \\ &= (D_0>C_0+D_0) = (0>C_0D) = (C+D_0>1) = \\ &= (CD_0>CD_0+C_0D) = (CD+C_0D_0>C_0+D), \dots \quad (17) \end{aligned}$$

a série où figurent toutes les seize classes du discours de deux lettres  $C$  et  $D$ .

Quant à la loi générale des formes d'une subsomption (ou d'une supersomption), nous devons dire que: 1°, la formule

$$(A=AB)=(A<B)=[U=U(A_0+B)+U_0AB_0], \dots (18)$$

donnée dans mon chapitre I, exprime la loi de transformation d'une subsomption quelconque dans une égalité ayant la forme de détermination de chaque classe  $U$  prise arbitrairement et que 2°, la loi analogue à la précédente, c'est à dire la loi de transformation d'une subsomption donnée dans une subsomption (ou dans une supersomption) ayant la forme de détermination de chaque classe  $U$  prise arbitrairement, n'existe point. En effet, afin que la formule

$$(A<B)=[U<A_0+B, U>AB_0],$$

équivalente à la formule (18), soit propre d'exprimer cette loi (en cas de son existence), il faut que le système de deux subsomptions hétérogènes  $U<A_0+B$ ,  $AB_0<U$  se transformerait pour chaque valeur de  $U$  dans une seule subsomption (ou supersomption) présentant la détermination de la classe  $U$ , dans quel but il faut et il suffit que l'une de deux subsomptions mentionnées se réduirait à l'identité  $0=0$ . Cette condition est satisfaite, comme il est facile de se convaincre dans le cas où  $A$  et  $B$  désignent les classes simples et où la classe  $U$  n'est exprimée que moyennant les lettres  $A$  et  $B$ . Mais généralement cette condition ne peut pas être satisfaite <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Supposons par exemple que pour la classe  $U$  est prise la fonction  $xAB_0+yA_0B$ . Sans doute, dans ce cas aucune de deux subsomptions mentionnées n'est équivalente à l'identité et par conséquent le système de ces deux subsomptions ne peut pas être remplacé par une seule subsomption (ou supersomption) ayant la forme de détermination de la classe  $xAB_0+yA_0B$ .

Donc la loi des formes des subsomptions, comprise dans le sens mentionné, n'existe point.

Mais cela n'empêche nullement l'existence de la loi des formes des subsomptions, comprise dans un autre sens. Cette loi s'exprime par le théorème suivant: le nombre des subsomptions différentes qui sont équivalentes à chaque égalité donnée (et par conséquent aussi à chaque subsomption donnée) est égale au nombre des causes principales de cette égalité.

Avant de donner la démonstration de ce théorème, il faut se ressouvenir que les trois subsomptions  $A < B$ ,  $A < AB$ ,  $A < A_0 + B$  et les trois subsomptions  $A < B$ ,  $A + B < B$ ,  $AB_0 < B$  ne présentent qu'une seule forme de l'égalité  $A = AB$ . Ainsi les deux subsomptions équivalentes à la même égalité doivent être regardées comme différentes, si elles présentent les deux formes différentes de cette égalité.

La démonstration du théorème énoncé plus haut est très simple.

Nous savons que l'égalité  $PQ=0$  est équivalente à chacune des deux subsomptions différentes  $P < Q_0$  et  $Q < P_0$ . Donc, si le zéro logique complet  $N$  de l'égalité donnée  $N=0$  est décomposé en le produit de deux facteurs  $R$  et  $S$ , les deux subsomptions équivalentes à l'égalité donnée  $N=0$  seront  $R < S_0$  et  $S < R_0$ . Par conséquent, en épuisant toutes les manières de divisibilité de la fonction  $N$  en le produit de deux facteurs, nous épuiserons toutes les différentes subsomptions équivalentes à l'égalité  $N=0$ . Il est évident que si  $k$  est le nombre des maximaux différents de la fonction  $N$ , le nombre de toutes les subsomptions mentionnées doit s'égaliser au nombre  $2^k$  qui est aussi le nombre de toutes les causes principales de cette égalité  $N=0$ .

La loi ci-démontrée peut se nommer ainsi: *la loi de transformation d'une égalité en subsomptions séparées*. La

formule qui l'exprime est:

$$(A=B)=(0=IQ)=(P<Q_0)=(Q<P_0).$$

*Exemple 1.* L'égalité  $a=b$  ou, ce qui est la même chose, l'égalité

$$0=(a+b)(a_0+b_0),$$

où  $a$  et  $b$  sont les classes simples, a les deux éléments d'extension. Donc, cette égalité doit être équivalente aux quatre subsomptions différentes. Nous aurons consécutivement:

$$\begin{aligned}(a=b) &= [0=1.(ab_0+a_0b)] = [0=(a+b)(a_0+b_0)] = \\ &= (1<ab+a_0b_0) = (ab_0+a_0b<0) = \\ &= (a+b<ab) = (a_0+b_0<a_0b_0).\end{aligned}$$

*Exemple 2.* L'égalité  $a=ab$  ou, ce qui est la même chose, l'égalité

$$0=(a+b)(a+b_0)(a_0+b_0),$$

ayant les trois éléments d'extension, doit être équivalente au nombre  $2^3$  des subsomptions différentes. Nous aurons consécutivement:

$$\begin{aligned}(a=ab) &= (0=1. ab_0) = [0=(a+b)b_0] = \\ &= [0=(a+b_0)(ab_0+a_0b)] = [0=(a_0+b_0)a] = \\ &= (1<a_0+b) = (ab_0<0) = \\ &= (a+b<b) = (b_0<a_0b_0) = \\ &= (a+b_0<ab_0+a_0b_0) = (ab_0+a_0b<a_0b) = \\ &= (a_0+b_0<a_0) = (a<ab).\end{aligned}$$

Ces résultats coïncident entièrement avec les formes de la subsomption  $a<b$  données dans la formule (18).



Pour terminer ce chapitre, démontrons quelques propositions spéciales qui concernent les subsomptions et qui sont déjà, presque toutes, connues dans la science.

1°. La formule évidente

$$\begin{aligned}(ab < c + d) &= (0 = abc_0 d_0) = (a < b_0 + c + d) = \\ &= (abc_0 < d) = (ac_0 < b_0 + d) = \dots\end{aligned}$$

exprime toutes les règles connues pour *transporter* dans chaque subsomption les facteurs du membre gauche dans le membre droit et les termes du membre droit dans le membre gauche.

2°. Les trois formules vraies:

$$\begin{aligned}(ac < bc) &= (0 = ab_0 c), \\ (a + c < b + c) &= (0 = ab_0 c_0), \\ (a < b) &= (0 = ab_0 = ab_0 c + ab_0 c_0)\end{aligned}$$

nous montrent que

$$\begin{aligned}(a < b) &\therefore (ac < bc), \\ (a < b) &\therefore (a + c < b + c), \\ (a < b) &= (ac < bc, a + c < b + c),\end{aligned}$$

ce qui nous donne les trois règles suivantes: 1°, en multipliant tous les deux membres d'une subsomption par la même classe, nous obtiendrons la conséquence de cette subsomption; 2°, en ajoutant à tous les deux membres d'une subsomption la même classe nous obtiendrons aussi une conséquence de cette égalité; 3°, chaque subsomption  $a < b$  est équivalente au système de deux subsomptions  $ac < bc$  et  $a + c < b + c$ .

3°. Les trois formules vraies:

$$\begin{aligned}(ac < bd) &= (0 = ab_0 c + acd_0), \\ (a + c < b + d) &= (0 = ab_0 c_0 + b_0 cd_0),\end{aligned}$$

$$(a < b, c < d) = (0 = ab_0 + cd_0)$$

nous donnent:

$$(a < b, c < d) \therefore (ac < bd),$$

$$(a < b, c < d) \therefore (a + c < b + d),$$

ce qui montre que les deux subsomptions peuvent être multipliées et ajoutées membre à membre.

4°. Les quatre formules évidentes:

$$(a < b, a < c) = (0 = ab_0 + ac_0) = (a < bc),$$

$$(a < c, b < c) = (0 = ac_0 + bc_0) = (a + b < c),$$

$$(a < b; a < c) = (0 = ab_0 \cdot ac_0) = (a < b + c),$$

$$(a < c; b < c) = (0 = ac_0 \cdot bc_0) = (ab < c)$$

expriment les règles de jonction (et de décomposition) des subsomptions dans le cas d'un système et dans le cas d'une alternative.

5°. Les deux formules évidentes:

$$(a < c) = (0 = ac_0),$$

$$(a < b, b < c) = (0 = ab_0 + bc_0) = (0 = ac_0, 0 = ab_0c + a_0bc_0)$$

montrent que le schème de conclusion

$$(a < b, b < c) \therefore (a < c)$$

présenté par le syllogisme Barbara est tout à fait juste.

6°. Démontrons enfin l'une des propositions spéciales que nous rencontrons en abondance dans le „Formulaire“ de M. Peano, par exemple la proposition 307 qui est:

$$(a < c, b < d, cd = 0) \therefore (ab = 0)$$

et qui était trouvée par De Morgan (a. 1847). Nous avons:

$$(a < c, b < d, cd = 0) = (0 = ac_0 + bd_0 + cd).$$

En éliminant d'abord  $d$  et puis  $c$ , nous aurons:

$$(a < b, b < d, cd = 0) \therefore (0 = ac_0 + bc) \therefore (0 = ab).$$

## Chapitre LX.

*Sur les déductions logiques. La loi de transformation d'une déduction (d'un problème hypothétique et secondaire) en une égalité séparée (en un problème catégorique et primaire).*

Dans ce chapitre je me propose de formuler la loi de conversion d'un problème hypothétique exprimé à l'aide du signe  $=$  en un problème catégorique.

Soit proposé le problème de la sorte: „si la classe  $A$  est égale à la classe  $B$ , la classe  $C$  est égale à la classe  $D$ “. C'est la forme la plus générale du problème hypothétique exprimé à l'aide du signe  $=$ , car chacune des deux égalités  $A=B$  et  $C=D$ , qui entrent dans ce problème et qui composent respectivement son *hypothèse* et sa *thèse*, peut être remplacée par les systèmes ou par les alternatives des égalités.

Il faut d'abord exprimer le problème proposé plus haut symboliquement. Si la justesse de l'égalité  $A=B$  doit être accompagnée, selon le sens du problème, par la justesse de l'égalité  $C=D$ , il est clair que, l'égalité  $A=B$  étant prise pour la cause, l'égalité  $C=D$  doit être traitée comme l'une de ses conséquences. Donc, le problème donné peut être exprimé ainsi:

$$(A=B) \therefore (C=D). \dots \quad (1)$$

Pour avoir la loi mentionnée, nous devons remplacer cette relation (1) par une seule égalité, c'est à dire transformer

la relation donnée entre les deux égalités  $A=B$  et  $C=D$  en une relation entre les classes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  qui figurent dans ces égalités. On peut aussi dire que nous devons dans ce cas convertir la proposition *secondaire* (1) en une proposition *primaire* correspondante.

Une fois que nous sommes arrivés à l'emploi de la relation (1) traitée comme une conception intègre et indépendante, nous devons proposer une dénomination quelconque pour cette relation. En employant un terme déjà introduit dans la littérature de la science, nous désignerons cette relation par le terme *de déduction*. Le signe  $\therefore$  doit se lire, comme *avant*, par les mots „*se déduit la conséquence*“ et la relation (1) doit signifier que de l'égalité  $A=B$  se déduit la conséquence  $C=D$ .

En parlant rigoureusement, la relation:

$$(C=D) \therefore (A=B) \dots \dots \quad (2)$$

inverse à la relation (1) doit aussi se nommer la *déduction* (de la seconde sorte), car elle signifie que de l'égalité  $C=D$  se déduit la cause  $A=B$ . Peut-être, la relation (2) devrait elle se nommer *induction*. Sans doute les deux relations (1) et (2) doivent être équivalentes l'une à l'autre, ce qui nous permet de ne considérer plus loin que les déductions de la première sorte que nous nommerons simplement „les déductions“.

Il est clair que la théorie des déductions et par conséquent aussi la théorie des jugements hypothétiques seront données du même coup, que sera trouvée la loi de conversion des déductions en égalités séparées.

Mais d'abord il faut instituer la division des conséquences, aussi bien que des causes et des déductions, en deux espèces différentes: les conséquences, les causes et les dé-

ductions *identiques* et les conséquences, les causes et les déductions *logiques*.

Toutes les conséquences que nous pouvons déduire de chaque égalité d'après les règles exposées dans ce livre ne sont que ses conséquences *identiques*. En effet, l'ensemble des connaissances exprimées par chacune de ces conséquences n'est qu'une partie *identique* de l'ensemble des connaissances renfermées dans l'égalité donnée. De même, toutes les causes que nous pouvons déduire de chaque égalité d'après les règles exposées dans ce livre ne sont que ses causes *identiques*, car l'ensemble des connaissances exprimées par chacune de ces causes embrasse toujours *identiquement* avec quelque excès l'ensemble des connaissances renfermées dans l'égalité donnée.

Mais rien ne nous empêche de traiter l'une des deux égalités  $P = Q$  et  $R = S$  prises arbitrairement comme la conséquence de l'autre. Dans ce cas l'ensemble des connaissances exprimées par la conséquence ne peut plus présenter la partie *identique* de l'ensemble des connaissances renfermées dans la cause. Tel cas se présente généralement dans le problème hypothétique ou, ce qui est la même chose, dans la relation de l'espèce (1). Dans ce cas la conséquence et la cause, n'étant plus identiques, doivent se nommer conditionnelles ou *logiques*.

Si la conséquence logique  $C = D$  donnée dans la déduction (1) est en même temps l'une des conséquences identiques de l'égalité  $A = B$ , la déduction (1) peut se nommer la *déduction identique*. Evidemment, elle doit être équivalente à l'identité  $1 = 1$  ou  $U = U$  et ne peut nous fournir aucune relation effective entre les classes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Dans tous les autres cas la relation (1) est la *déduction logique* et doit être équivalente à une égalité que nous avons encore à chercher

La loi des conséquences (identiques) prise dans sa forme:

$$(0=N') \therefore (0=N'X) \dots \dots \quad (2)$$

et présentant l'une des déductions identiques nous montre que si la thèse de la déduction est l'une des conséquences identiques de son hypothèse, le zéro logique complet de la thèse est l'une des subclasses identiques du zéro logique complet de l'hypothèse. Sans doute, nous pouvons aussi dire inversement que si le zéro logique complet de la seconde des deux égalités données est l'une des subclasses identiques du zéro logique complet de la première, alors la seconde égalité est l'une des conséquences identiques de la première. Donc, l'assertion que l'hypothèse de la déduction est l'une des causes identiques de sa thèse doit être équivalente à l'assertion que le zéro logique complet de l'hypothèse est l'une des superclasses identiques du zéro logique complet de la thèse. Ainsi, en désignant pour quelque temps le produit  $N'X$  par le symbole  $N''$ , nous obtenons la formule:

$$(0=N') \therefore (0=N'') = (N''=N''N') = (0=N''N'_0) = (N'' < N') \dots \quad (3)$$

qui n'est encore démontrée que pour le cas  $N''=N'X$ . C'est la formule qui nous donne une égalité équivalente à la déduction  $(0=N') \therefore (0=N'')$  pour le cas où  $N''=N'X$ .

En substituant dans la formule (3) au lieu de  $N''$  sa valeur  $N'X$ , nous obtenons la formule vraie:

$$(0=N') \therefore (0=N'X) = (N'X=N'X.N') = (N'X < N') = (0=0), \quad (4)$$

qui est une identité, conformément à ce que nous avons dit plus haut.

A présent quelques mots suffisent pour étendre la formule (3) au cas général où la classe  $N''$  est différente de la classe

$N'X$ . En effet, si, pour le cas où la thèse  $0=N''$  est la conséquence *identique* de l'hypothèse  $0=N'$ , la fonction  $N''$  est la sous-classe *identique* de la fonction  $N'$ , il est naturel d'affirmer que, dans le cas où la thèse  $0=N'$  est la conséquence *logique* de l'hypothèse  $0=N'$ , la fonction  $N''$  doit être la sous-classe *logique* de la fonction  $N'$  et vice versa: si, pour le cas où la fonction  $N''$  est la sous-classe *identique* de la fonction  $N'$ , la thèse  $0=N''$  est la conséquence *identique* de l'hypothèse  $0=N'$ , alors il est naturel d'affirmer que, pour le cas, où la fonction  $N''$  est la sous-classe *logique* de la fonction  $N'$ , la thèse  $0=N''$  doit présenter la conséquence *logique* de l'hypothèse  $0=N'$ .

Ce raisonnement qui peut-être ne donne pas la démonstration rigoureuse rend la justesse de la formule (3) dans tous les cas tout à fait vraisemblable.

La formule (3), que nous traiterons désormais comme parfaitement juste, est l'une de formes de *la loi de conversion des déductions logiques en égalités isolées*.

Profitions de la formule (3) pour faire quelques conclusions intéressantes.

1°. L'égalité  $0=N''N'_0$  qui figure dans cette formule se transforme en l'identité  $0=0$  non seulement dans le cas où  $N''=N'X$  qui correspond à la formule (4), mais encore dans les deux cas: où  $N'=1$  et où  $N''=0$ . Cela nous donne les deux formules vraies:

$$(0=1) \therefore (0=N'')=(0=0),$$

$$(0=N') \therefore (0=0)=(0=0).$$

Donc, la déduction n'a point de valeur logique (est équivalente à l'identité) lorsque: 1°, son hypothèse est une absurdité et 2°, sa thèse est une identité. Nous devons y ajouter

le troisième cas où l'hypothèse est la cause identique de la thèse.

2°. Pour les valeurs  $N'=0$ ,  $N''=1$  nous obtenons la formule vraie:

$$(0=0).\therefore(0=1)=(0=1).$$

C'est le seul cas où la déduction est équivalente à l'absurdité.

3°. Pour la valeur  $N'=0$  la formule (3) devient:

$$(0=0).\therefore(0=N'')=(0=N'').$$

Cela signifie que si l'hypothèse n'a point de la valeur logique (est une identité), la déduction est équivalente à sa thèse.

4°. Pour la valeur  $N''=1$  la formule (3) nous donne:

$$(0=N').\therefore(0=1)=(0=N'_0).$$

Donc, si la thèse est égale à l'absurdité, la déduction est équivalente à l'égalité opposée à son hypothèse.

5°. Encore une remarque intéressante. Il peut sembler que si l'hypothèse (qui doit toujours être traitée comme la cause logique de la thèse) est l'une de conséquences identiques de la thèse, la déduction doit s'égaliser à l'absurdité, mais cela n'est pas ainsi, car pour la valeur  $N=N'\mathcal{Y}$  la formule (3) nous donnera

$$(0=N'\mathcal{Y}).\therefore(0=N'')=(0=N'\mathcal{Y}_0).$$

Cela signifie que si l'hypothèse est la conséquence identique de la thèse, la déduction est équivalente à l'excès des connaissances contenues dans la thèse.

En transformant toutes les égalités de la formule (3) en la forme de déterminations de l'unité, nous aurons la formule:



$$(1=M') \therefore (1=M'') = (1=M' + M'_0) = (M' < M''). \dots (5)$$

qui est aussi l'une des formes de la même loi de conversion des déductions en égalités isolées.

Les formules (3) et (5) qui ne sont que les formes particulières de la loi mentionnée nous montrent que le complet rien logique  $N$  de la déduction  $(0=N') \therefore (0=N'')$  et le complet tout logique  $M$  de la même déduction sont respectivement:

$$N = N'_0 N', \quad M = N_0 = M'_0 + M'' \dots (6)$$

En appliquant les formules (3) et (5) au cas de la déduction (1), nous aurons les formules:

$$(A=B) \therefore (C=D) = [0 = (AB + A_0 B_0)(CD_0 + C_0 D)], \dots (7)$$

$$(A=B) \therefore (C=D) = [1 = AB_0 + A_0 B + CD + C_0 D_0], \dots (8)$$

qui sont aussi les formes particulières de la même loi. Mais la forme la plus générale de cette loi sera évidemment:

$$\begin{aligned} (A=B) \therefore (C=D) &= (U = UM + U_0 N) = \\ &= [U = U(AB_0 + A_0 B + CD + C_0 D_0) + U_0(AB + A_0 B_0)(CD_0 + \\ &\quad C_0 D)], \dots (9) \end{aligned}$$

où la classe  $U$  est tout à fait arbitraire.

Je dois dire que des cinq formules (3), (5), (7), (8) et (9) seulement la dernière, c'est à dire la plus générale, est tout à fait nouvelle. La formule (5) se trouve (dans une autre forme) parmi les formules données dans l'ouvrage capital de M. Schröder. Les trois autres formules, étant des modifications de la formule (5), peuvent aussi être considérées comme connues.

La forme dans laquelle nous donne M. Schröder la formule (5) est <sup>1)</sup>:

$$[A < B] = A_0 + B, \dots \quad (10)$$

où par les symboles  $A$  et  $B$  sont désignées les deux propositions et le signe  $<$  qui est le signe de subsumption est employé dans le sens du signe de déduction  $\therefore$ . La classe  $A_0 + B$  est nommée „Gültigkeitsklasse der Subsumtion  $A < B$ “ et correspond évidemment à ce que nous nommons le complet tout logique de la déduction considérée. Sans doute, dans la formule (10) les symboles  $A$  et  $B$  expriment proprement dit non pas les propositions elles-mêmes, mais leurs complètes unités logiques. Le lecteur retrouvera cette formule (10) dans le chapitre suivant.

*Exemple.* Convertir la proposition hypothétique „si  $a$  est  $b$ , alors  $c$  n'est ni  $a$ , ni  $d$ “ en la proposition catégorique.

La déduction qui exprime la proposition donnée est évidemment:

$$(a = ab) \therefore (c = ca_0 d_0)$$

ou encore:

$$(1 = a_0 + b) \therefore (1 = c_0 + a_0 d_0)$$

ou enfin:

$$(0 = ab_0) \therefore [0 = c(a + d)].$$

Donc, l'expression générale de toutes les formes du problème catégorique qui est équivalent au problème donné sera:

$$U = U (c_0 + a_0 d_0 + ab_0) + U_0 c (a + d)(a_0 + b),$$

où  $U$  est une classe arbitraire.

A présent, quand nous avons appris à convertir chaque

---

<sup>1)</sup> Voyez «Algebra der Logik» von Schröder, 1891, B. 2, S. 68.

dédution en une égalité isolée, nous pouvons dire que nous sommes en état de construire pour chaque déduction donnée toutes ses formes, tous ses éléments, toutes ses conséquences, toutes ses causes et toutes ses racines.

## Chapitre LXI.

*Sur la liaison entre les déductions et les subsomptions. La loi de transformation d'une égalité (d'un problème primaire) en déductions (en problèmes secondaires). Démonstration du principe d'importation et d'exportation. Sur la pluralité des calculs possibles des propositions. Les fondements de deux calculs les plus simples.*

Dans le chapitre précédent on a donné les deux formules:

$$(0=N') \therefore (0=N'')=(N'<N''), \dots \quad (1)$$

$$(1=M') \therefore (1=M'')=(M'<M''), \dots \quad (2)$$

qui nous montrent qu'à chaque déduction correspond une subsomption et vice versa. S'il en est ainsi, tout ce qui est démontré dans le chapitre LIX relativement aux subsomptions doit se rapporter aussi aux déductions. Cela nous permet de dire, par exemple, que la loi de transformation d'une égalité en déductions différentes doit s'exprimer par la formule:

$$(A=B)=(0=PQ)=(P_0=0) \therefore (Q=0)=(Q_0=0) \therefore (P=0)$$

et peut être énoncée ainsi: le nombre des différentes déductions équivalentes à chaque égalité donnée doit être égale au nombre des causes principales de cette égalité.

Par exemple, l'égalité  $a=b$ , où  $a$  et  $b$  sont les classes simples, n'est équivalente qu'aux quatre déductions différentes, c'est à dire:

$$\begin{aligned}
 (a=b) &= (1=1) \therefore (ab + a_0 b_0 = 1) = \\
 &= (ab_0 + a_0 b = 1) \therefore (0=1) = \\
 &= (a + b = 1) \therefore (ab = 1) = \\
 &= (a_0 + b_0 = 1) \therefore (a_0 b_0 = 1).
 \end{aligned}$$

Un autre exemple: toutes les huit différentes déductions équivalentes à l'égalité  $a=ab$ , ou à la subsumption  $a < b$ , ou à la déduction  $(b=0) \therefore (a=0)$ , sont:

$$\begin{aligned}
 (a=ab) &= (a < b) = [U = U(a_0 + b) + U_0 ab_0] = (b=0) \therefore (a=0) = \\
 &= (a_0 + b = 0) \therefore (1=0) = (0=0) \therefore (ab_0 = 0) = \\
 &= (b=0) \therefore (a + b = 0) = (a_0 b_0 = 0) \therefore (b_0 = 0) = \\
 &= (ab + a_0 b_0 = 0) \therefore (a + b = 0) = (a_0 b = 0) \therefore (ab_0 + a_0 b = 0) = \\
 &= (a_0 = 0) \therefore (a_0 + b_0 = 0) = (ab = 0) \therefore (a = 0).
 \end{aligned}$$

Il est à observer ici que les cinq déductions:

$$\begin{aligned}
 (b=0) \therefore (a=0), \quad (ab=0) \therefore (a=0), \quad (a_0 + b = 0) \therefore (a=0), \\
 (b=0) \therefore (a + b = 0), \quad (b=0) \therefore (ab_0 = 0),
 \end{aligned}$$

ainsi que les cinq déductions:

$$\begin{aligned}
 (a=1) \therefore (b=1), \quad (a=1) \therefore (ab=1), \quad (a=1) \therefore (a_0 + b = 1), \\
 (a + b = 1) \therefore (b=1), \quad (ab_0 = 1) \therefore (b=1)
 \end{aligned}$$

sont non seulement équivalentes entre elles, mais ne présentent aussi qu'une seule forme de l'égalité  $a=ab$ .

Sans doute, chacune des conséquences identiques de chaque égalité peut être présentée sous forme de déduction. Par exemple, vu que l'égalité  $0=ax+bx_0$  a parmi ses conséquences identiques, données dans le chapitre XVIII, l'égalité  $0=a(bx_0 + b_0 x)$  qui est équivalente à la déduction  $(a=1) \therefore (bx + b_0 x_0 = 1)$ , nous pouvons dire que cette déduction est l'une des

conséquences identiques de l'égalité  $0=ax+bx_0$ . En effet, il n'est pas difficile de se convaincre que le schème:

$$(0=ax+bx_0) \cdot [(a=1) \cdot (bx+bx_0=1)]$$

est équivalent à l'identité.

Certainement, ce qui est possible pour les déductions et les conséquences identiques doit se rapporter aussi aux déductions et conséquences logiques. Ainsi nous obtenons le problème:

$$(A=B) \cdot [(C=D) \cdot (E=F)] \dots \quad (3)$$

qui appartient au nombre des propositions *tertiaires* et dont la valeur logique peut être facilement trouvée.

En effet, si nous posons:

$$N'=AB_0 + A_0B, \quad N''=CD_0 + C_0D, \quad N'''=EF_0 + E_0F,$$

où  $N'$ ,  $N''$ ,  $N'''$  sont les zéros logiques complets de trois égalités qui figurent dans le schème (3), ce schème devient:

$$(N'=0) \cdot [(N''=0) \cdot (N'''=0)] \dots \quad (4)$$

Mais nous savons que

$$(N''=0) \cdot (N'''=0) = (N''' < N'') = (0 = N'''N''_0),$$

$$(N'=0) \cdot (N'''N''_0=0) = (N'''N''_0 < N') = (0 = N'''N''_0N'_0).$$

Donc nous aurons finalement:

$$(N'=0) \cdot [(N''=0) \cdot (N'''=0)] = (0 = N'_0N''_0N'''). \dots \quad (5)$$

Cette formule se transforme aisément en la suivante:

$$(M'=1) \cdot [(M''=1) \cdot (M'''=1)] = (1 = M'_0 + M''_0 + M'''), \dots \quad (6)$$

Les formules (5) et (6) expriment la règle de transformation d'un des problèmes tertiaires (3) ou (4) en le problème primaire.

Mais le même problème tertiaire (3) peut être transformé préalablement en le problème secondaire. L'une des règles qu'on peut proposer dans ce but est due à M. Peirce et se nomme le *principe d'importation et d'exportation*. Nous pouvons exprimer ce principe par la formule:

$$(A=B) \cdot [(C=D) \cdot (E=F)] = [A=B, C=D] \cdot (E=F) \dots (7)$$

En vertu de ce principe, pour transformer la proposition tertiaire (3) en la proposition secondaire qui coïncide avec le membre droit de la formule (7) il suffit d'*exporter* l'hypothèse  $C=D$ ; pour la transformation inverse il suffit d'*importer* la même hypothèse.

La démonstration du principe (7) est très simple. En effet, nous avons:

$$(0 = N' \circ N'' \circ N''') = (N''' < N' + N'') = (N' + N'' = 0) \cdot (N''' = 0)$$

et par conséquent, en vertu de la formule (5):

$$(N' = 0) \cdot [(N'' = 0) \cdot (N''' = 0)] = (N' = 0, N'' = 0) \cdot (N''' = 0), (8)$$

ce qui démontre le principe mentionné.

De même la formule (6) nous donnera:

$$(M' = 1) \cdot [(M'' = 1) \cdot (M''' = 1)] = (M' = 1, M'' = 1) \cdot (M''' = 1) (9)$$

C'est la troisième forme du même principe.

Sans doute, le lecteur trouvera facilement les valeurs logiques du problème:

$$[(A=B) \cdot (C=D)] \cdot (E=F)$$

qui est analogue au problème (3) et aussi au problème

$$[(A=B) \cdot (C=D)] \cdot [(E=F) \cdot (G=H)]$$

qui est encore plus compliqué.

Voilà nous sommes en état de résoudre les problèmes le plus compliqués sur les égalités et cela sans l'aide de la discipline particulière qu'on nomme le Calcul des propositions (Aussagenkalkul). Cela nous montre avec évidence que cette discipline n'est point nécessaire pour la Logique mathématique. A ces causes je ne dirai ici que quelques mots sur le Calcul des propositions ou, plus exactement, sur les calculs possibles des propositions.

Le but du calcul spécial des propositions est de remplacer les égalités par les lettres isolées et d'exprimer toutes les opérations sur les égalités sous forme des opérations sur les lettres mentionnées. Dans ce but il faut et il suffit: 1<sup>o</sup>; réduire toutes les égalités à la forme de déterminations de la même classe  $U$  prise arbitrairement et 2<sup>o</sup>, examiner comment les opérations tout-possibles sur les égalités s'expriment dans la forme des opérations sur les classes déterminantes des déterminations mentionnées de  $U$ . Alors il sera possible remplacer chaque égalité par la classe déterminante  $U$  et au lieu des opérations sur les égalités exécuter les opérations sur ces classes.

Vu que la classe mentionnée  $U$  peut être choisie tout à fait arbitrairement, nous pouvons dire que, pour nous qui savons convertir chaque égalité dans les formes tout-possibles, il doit exister beaucoup des systèmes parallèles du Calcul des propositions. Mais jusqu'à présent on ne savait que les deux formes des égalités: les formes correspondantes à la valeur  $U=0$  et les formes correspondantes à la valeur  $U=1$ . C'est à cette dernière valeur de  $U$  que correspond le système usité du Calcul des propositions.

J'exposerai ici parallèlement les fondements de deux calculs correspondants aux valeurs  $U=0$  et  $U=1$ .

1°. Si dans toutes les égalités qui figurent dans les formules:

$$(0=N', 0=N'', 0=N''',...)=(0=N'+N''+N''' +...),$$

$$(0=N'; 0=N''; 0=N''';...)=(0=N'N''N'''...)$$

nous rejetons le symbole 0 et le signe=, nous recevons:

$$(N', N'', N''',...)=(N'+N''+N''' +..),$$

$$(N'; N''; N''';...)=(N' N'' N'''...).$$

Cela montre que, dans le calcul qui correspond au remplacement de chaque égalité par son complet logique zéro, le système des égalités doit s'exprimer par la somme des symboles des égalités, tandis que l'alternative des égalités doit s'exprimer par le produit des mêmes symboles.

L'inverse doit avoir lieu dans le calcul usité, car dans ce calcul il faut rejeter dans toutes les égalités des formules:

$$(1=M', 1=M'', 1=M''',...)=(1=M'M''M'''...),$$

$$(1=M'; 1=M''; 1=M''';...)=(1=M'+M''+M''' +...)$$

le symbole 1 et le signe=après quoi nous recevons:

$$(M', M'', M''',...)=(M'M''M'''...),$$

$$M'; M''; M''';...)=(M'+M''+M''' +...).$$

Telles sont les règles des opérations sur les égalités *primaires* dans les deux calculs considérés.

2°. Quant aux propositions *secondaires*, la loi de conversion d'une déduction dans une égalité séparée, la loi qui s'exprime par chacune de deux formules:

$$(0=N') \therefore (0=N'')=(N' > N'')=(0=N'N''_0),$$

$$(1=M') \therefore (1=M'')=(M' < M'')=(1=M'_0 + M'')$$



prend dans le premier de deux calculs la forme:

$$(N' \therefore N'') = (N' > N'') = (N'' N'_0).$$

et dans le second:

$$(M' \therefore M'') = (M' < M'') = (M'_0 + M''). \text{ } ^1)$$

C'est pourquoi, dans le calcul usité, on emploie, au lieu de deux signes différents  $\therefore$  et  $<$ , un seul signe  $>$ , ce qui est „une source de confusions et d'ambiguïtés“ <sup>2)</sup>. Sans doute, dans le premier des deux calculs considérés les signes  $\therefore$  et  $<$  peuvent aussi être remplacés par un seul, par exemple celui-ci:  $C$ .

3°. Enfin, quant aux propositions *tertiaires*, le principe d'importation et d'exportation exprimé par chacune de deux formules:

$$\begin{aligned} (N'=0) \therefore [(N''=0) \therefore (N'''=0)] &= (N' + N''=0) \therefore (N'''=0) = (N' + \\ &\quad N'' > N'''), \\ (M'=1) \therefore [(M''=1) \therefore (M'''=1)] &= (M' M''=1) \therefore (M'''=1) = (M' \\ &\quad M'' < M''') \end{aligned}$$

prend dans le premier des calculs la forme:

$$N' \therefore (N'' \therefore N''') = (N' + N'' > N''')$$

et dans le second:

$$M' \therefore (M'' \therefore M''') = (M' M'' < M''').$$

## Chapitre LXII.

*Les trois sortes différentes de problèmes secondaires: déduction, induction et identification. La loi de transformation*

<sup>1)</sup> Cette formule coïncide avec la formule (10) du chapitre précédent.

<sup>2)</sup> Ce sont les mots justes de M. Couturat dans son article intéressant «La logique mathématique de M. Peano». (Revue de Métaphysique et de Morale, Septembre 1899).

*d'une identification dans une égalité primaire. La loi de transformation d'une égalité dans les identifications. L'un des problèmes du quatrième ordre.*

Etant données les deux égalités quelconques  $A=B$  et  $C=D$ , nous pouvons composer, outre le problème:

$$(A=B) \therefore (C=D), \dots \quad (1)$$

discuté dans les deux chapitres précédents, encore deux problèmes secondaires qui sont:

$$(A=B) \therefore (C=D), \dots \quad (2)$$

$$(A=B)=(C=D). \dots \quad (3)$$

Le problème (1) correspond à la supposition que la première des deux égalités données est la cause logique de la seconde. Le problème (2) exprime la supposition inverse: que la première égalité est la conséquence logique de la seconde. Enfin dans le problème (3) les deux égalités données sont supposées d'être logiquement équivalentes, ainsi que la première d'elles est la cause et la conséquence de la seconde (et vice versa).

Convenons de nommer les trois propositions secondaires exprimées par les schèmes (1), (2) et (3) respectivement: *déduction, induction et identification*.

Le problème (1) est déjà résolu dans le chapitre LX. En désignant par  $N'$  et  $N''$  les zéros logiques des égalités  $A=B$  et  $C=D$ , nous avons:

$$[(0=N') \therefore (0=N'')] = (0=N'_0 N''). \dots \quad (4)$$

Le problème (2) se résout facilement à l'aide d'indication qu'il est équivalent à la déduction:

$$(C=D) \therefore (A=B),$$

ce qui nous donne immédiatement:

$$[(0=N') \cdot (0=N'')] = (0=N'N''_0). \dots \quad (5)$$

Il ne nous reste donc qu'à résoudre le problème de l'identification (3). Dans ce but il suffit d'observer que le problème (3) est équivalent au système de deux problèmes (1) et (2), ce qui nous donne d'abord:

$$[(0=N') = (0=N'')] = [(0=N') \cdot (0=N'')], [(0=N') \cdot (0=N'')];$$

puis, à l'aide des formules (4) et (5):

$$[(0=N') = (0=N'')] = (0=N'_0N'' + 0=N'N''_0)$$

et finalement:

$$[(0=N') = (0=N'')] = (0=N'_0N'' + N'N''_0). \dots \quad (6)$$

Cette formule (6) qui correspond totalement à la formule évidente:

$$[(0=N') = (0=N'')] = (N' = N'')$$

est l'une des formes de la loi de transformation d'une identification quelconque dans une égalité primaire. Autres formes de la même loi se trouveront sans difficultés.

Les formules (4), (5) et (6) étant développées ainsi:

$$[(0=N'N'' + N'N''_0) \cdot (0=N'N'' + N'_0N'')] = (0=N'_0N''),$$

$$[(0=N'N'' + N'N''_0) \cdot (0=N'N'' + N'_0N'')] = (0=N'N''_0),$$

$$[(0=N'N'' + N'N''_0) = (0=N'N'' + N'_0N'')] = (0=N'_0N'' + N'N''_0),$$

nous montrent que: 1°, la déduction est équivalente aux connaissances qui se renferment dans la seconde de ces deux égalités et n'entrent pas dans la première; 2°, l'induction exprime les connaissances qui entrent dans la première de ces deux égalités et n'entrent pas dans la seconde; enfin, 3°, l'i-

dentification embrasse l'ensemble des connaissances qui se renferment dans l'une de ces deux égalités et n'entrent pas dans l'autre.

Pour donner des exemples, supposons que les deux égalités primaires données sont  $a=b$  et  $a=0$ . Les formules (4), (5) et (6) nous donneront:

$$\begin{aligned} [(a=b) \cdot (a=0)] &= (0=ab) = (a=ab_0), \\ [(a=b) \cdot (a=0)] &= (0=a_0b) = (a=a+b), \\ [(a=b) = (a=0)] &= (0=ab + a_0b) = (b=0). \end{aligned}$$

Passons aux règles pour transformer les égalités primaires dans les propositions secondaires. Pour transformer une égalité dans les déductions, nous avons la règle donnée dans le chapitre précédent. La même règle doit servir aussi pour transformer une égalité dans les inductions, car chaque déduction se transforme immédiatement dans une induction correspondante. Il ne nous reste donc qu'à donner la règle pour transformer chaque égalité dans les identifications.

La formule (6) nous montre que si le complet zéro  $N$  de l'égalité donnée  $N=0$  est réduit à la forme:

$$N = PQ_0 + P_0Q, \dots \quad (7)$$

alors l'égalité  $N=0$  doit être équivalente à l'identification

$$(P=0) = (Q=0).$$

Afin d'épuiser toutes les manières d'exécuter la transformation de la fonction  $N$  d'après le schème (7), supposons que  $U$  est la classe tout à fait arbitraire et cherchons la classe  $x$  qui doit satisfaire à la décomposition:

$$N = Ux_0 + U_0x. \dots \quad (8)$$

Cette égalité (8) est équivalente à l'égalité:

$$0 = N (Ux + U_0 x_0) + N_0 (Ux_0 + U_0 x) = x (NU + N_0 U) + x_0 (NU_0 + N_0 U)$$

et aussi à l'égalité:

$$x = x (NU_0 + N_0 U) + x_0 (NU_0 + N_0 U) = NU_0 + N_0 U.$$

Voilà la valeur de  $x$  qui satisfait identiquement à la condition (8). De tout cela il suit que la formule:

$$(N=0) = [(U=0) = (NU_0 + N_0 U=0)]. \dots \quad (9)$$

doit exprimer la loi de transformation d'une égalité quelconque dans les identifications. Puisque la classe  $U$  est arbitraire, nous pouvons dire que le nombre des manières pour exécuter cette transformation est infini. Or nous savons que toutes les formes de l'égalité  $N=0$  sont renfermées dans la formule:

$$(N=0) = (U - UN_0 + U_0 N).$$

D'où il suit que toutes les identifications équivalentes à l'égalité donnée  $N=0$  seront épuisées en égalant séparément à zéro les deux membres de chaque égalité qui serve de forme de cette égalité donnée  $N=0$ .

*Exemple.* Vu que toutes les formes principales de l'égalité  $a=b$  sont:

$$\begin{aligned} (a=b) &= (ab_0 + a_0 b = 0) = (ab + a_0 b_0 = 1) = (a_0 = b_0) = \\ &= (ab = a + b) = (ab_0 = a_0 b) = (a_0 b_0 = a_0 + b_0) = (a + b_0 = a_0 + b), \end{aligned}$$

toutes les identifications principales équivalentes à la même égalité doivent être:

$$\begin{aligned} (a=b) &= [(a=0) = (b=0)] = [(ab_0 + a_0 b = 0) = (0=0)] = \\ &= [(ab + a_0 b_0 = 0) = (1=0)] = \\ &= [(a_0 = 0) = (b_0 = 0)] = [(ab = 0) = (a + b = 0)] = [(a_0 b_0 = 0) = \\ &= (a_0 b = 0)] = \end{aligned}$$

$$=[(a_0 b_0 = 0) = (a_0 + b_0 = 0)] = [(a + b_0 = 0) = (a_0 + b = 0)].$$

Ce qui est exposé plus haut est tout à fait suffisant pour pouvoir résoudre les problèmes logiques d'un ordre arbitraire. Voilà par exemple les transformations successives d'un problème du quatrième ordre:

$$\begin{aligned} \{[(0=N') \cdot (0=N'')]\} &= [(0=N''') \cdot [(0=N^{IV}) = (0=N^V)]] \} = \\ &= \{[(0=N'_0 N'') = [(0=N''') \cdot (0=N^{IV}_0 N^V + N^{IV}_0 N^V_0)]]\} = \\ &= \{[(0=N'_0 N'') = [0=N''' (N^{IV}_0 N^V + N^{IV}_0 N^V_0)]]\} = \\ &= \{[0=(N' + N'_0) N''' (N^{IV}_0 N^V + N^{IV}_0 N^V_0) + N'_0 N''' (N^{IV}_0 + \\ &\quad N^{IV}_0 N^V + N^{IV}_0 N^V_0)]\}. \end{aligned}$$

(A. suivre).

**P. Poretsky.**

## О давленіи свѣтовыхъ лучей.

На основаніи соображеній термодинамическаго характера *Bartoli* <sup>1)</sup> пришелъ къ заключенію, что, падая нормально на идеально зеркальную поверхность, свѣтовые лучи оказываютъ на нее давленіе  $p$ , численно равное ихъ двойной энергіи  $e$  единицы объема, т. е.  $p=2e$ . Для пустого пространства, окруженнаго идеально зеркальными стѣнками постоянной температуры, *Boltzmann* <sup>2)</sup> вычислилъ—и тоже термодинамическимъ путемъ—нормальное давленіе  $p=\frac{1}{3}\eta$ , гдѣ  $\eta$  есть энергія единицы объема, какъ слѣдствіе закона лучеиспусканія—закона *Stefan*'а. Позже, въ другой работѣ по тому же вопросу *Boltzmann* <sup>3)</sup> замѣчаетъ, что изъ соотношенія  $p=\frac{1}{3}\eta$  выходитъ  $p=e$  и  $p=2e$ , смотря по тому будетъ ли поверхность совершенно черная или совершенно зеркальная. Въ то же время оказывается, что эти два послѣднія соотношенія суть слѣдствія электромагнитной теоріи свѣта *Maxwell*'а. Именно, мы находимъ у *Maxwell*'а такое положеніе для *не проводящихъ*

---

<sup>1)</sup> *Bartoli*, *Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore etc.*, Firenze, 76 pp. 1876.

<sup>2)</sup> *Boltzmann*, *Wied. Ann.* 22 p. 31, 1884.

<sup>3)</sup> *Boltzmann*, *l. c.* p. 293.

средѣ <sup>1)</sup>: „въ средѣ, въ которой распространяются волны, есть давленіе, направленное по нормали волны и численно равное энергіи въ единицѣ объема“; а въ слѣдующемъ параграфѣ (art. 793) этотъ ученый утверждаетъ, что „выставленное на солнечный свѣтъ плоское тѣло будетъ испытывать это давленіе только съ своей освѣщенной стороны и будетъ поэтому отталкиваться съ той стороны, на которую падаетъ свѣтъ“ <sup>2)</sup>. По этому поводу *Boltzmann* замѣчаетъ, что „результатъ *Maxwell*'а имѣетъ мѣсто, если лучъ падаетъ на поверхность нормально и ею поглощается; если бы падающій нормально лучъ былъ подѣ тѣмъ же угломъ отраженъ, давленіе было бы вдвое болѣе“ <sup>3)</sup>. Здѣсь очевидно поглощеніе и отраженіе подразумѣваются абсолютныя.

Такимъ образомъ, какъ видимъ, существуетъ два независимыхъ другъ отъ друга пути для вывода этого т. н. „свѣтового давленія“—путь термодинамическій и путь электромагнитный.

Что касается перваго, то *Boltzmann* самъ относится къ своимъ вычисленіямъ въ достаточной мѣрѣ недовѣрчиво, смотря на нихъ какъ на „предварительныя“ <sup>4)</sup>; *Bartoli* выбираетъ гипотезу о существованіи давленія свѣта лишь какъ „наиболѣе простую“ <sup>5)</sup>; наконецъ и по *Boltzmann*'у можно устра-

---

<sup>1)</sup> *Maxwell*, A treatise on Electricity and Magnetism, sec. ed; Vol. II. Oxford 1881; p. 401, art. 792. «in a medium in which waves are propagated there is a pressure in direction normal to the waves and numerically equal to the energy in unit of volume».

<sup>2)</sup> *Maxwell*, l. c. «a flat body exposed to sunlight would experience this pressure on its illuminated side only, and would therefore be repelled from the side on which the light falls».

<sup>3)</sup> *Boltzmann* l. c. p. 291—292.

<sup>4)</sup> *Boltzmann* l. c. p. 293. «wenn auch sicher niemand den vielfach provisorischen Character der hier durchgeführten Rechnungen verkennen wird».

<sup>5)</sup> *Bartoli* l. c. p. 25 «l'ipotesi più semplice».



нить возникающее при разсмотрѣніи нѣкоторыхъ процессовъ противорѣчіе со вторымъ закономъ термодинамики еще и „иной гипотезой“ <sup>1)</sup>, не прибѣгая непременно къ допущенію свѣтового давленія.

Что касается теперь электромагнитной теоріи *Maxwell*'а, то очевидно изъ положенія въ параграфѣ 792 еще не вытекаетъ необходимымъ образомъ заключеніе о подобномъ же давленіи и на *границы двухъ оптически разнородныхъ средъ*; здѣсь надо имѣть въ виду и силы, дѣйствующія во второй—отражающей и поглощающей свѣтъ—средѣ; на границѣ будетъ дѣйствовать равнодѣйствующая тѣхъ силъ, которыя получатся по извѣстнымъ правиламъ теоріи упругости изъ силъ, дѣйствующихъ внутри каждаго тѣла <sup>2)</sup>. Только въ предѣльныхъ случаяхъ нормальнаго паденія на совершенное зеркало или на совершенно черное тѣло, можно указать результирующее давленіе прямо, какъ это и сдѣлалъ *Boltzmann*.

Именно, въ первомъ случаѣ внутри второй среды всѣ электромагнитные векторы обращаются въ нуль и второй среды какъ будто не существуетъ; во второмъ случаѣ во второй средѣ энергія есть, но она тепловая и не выражается черезъ электромагнитные векторы; послѣдніе, какъ таковые, здѣсь не существуютъ и опять выходятъ, какъ будто второй среды вовсе нѣтъ.

Впрочемъ по поводу такого представленія о черномъ тѣлѣ возникаютъ сомнѣнія. Дѣло въ томъ, что оптически черное тѣло должно быть въ то же время оптически тождественно съ прилегающей къ нему средой, а въ такомъ случаѣ нѣтъ мѣста никакому *одностороннему* давленію <sup>3)</sup>.

---

<sup>1)</sup> *Boltzmann*, I. с. р. 38.

<sup>2)</sup> Ср. *Pockels*, *Grunert's Archiv*, 12 р. 60, 1894.

<sup>3)</sup> Если напр. мы имѣемъ тѣло, граничащее съ пустотой—для простоты,—то его отражающая способность при нормальномъ паденіи есть, какъ

Наконецъ и независимо отъ этого, наши разсужденія справедливы только при условіи, что внутри средъ, гдѣ имѣется свѣтовой процессъ, нѣтъ никакихъ „объемныхъ“ силъ, и все дѣло сводится только къ *p Maxwell'a*. Но, какъ извѣстно, именно этого, вообще говоря, и нѣтъ, какъ это было обнаружено еще *Hertz'емъ* <sup>1)</sup>.

А въ такомъ случаѣ и вопросъ о давленіи свѣта вообще остается открытымъ.

1. Разсмотримъ общій случай поляризующейся, проводящей и имѣющей скорости по осямъ  $\alpha, \beta, \gamma$  среды, которую будетъ считать изотропной съ постоянными: діэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$ . Вводя обозначенія *Hertz'a*:  $X, Y, Z$  для слагающихся электрической силы,  $L, M, N$  для слагающихся магнитной силы и называя  $A$  скорость свѣта въ эфирѣ, а  $u, v, w$  слагающія Омовскаго тока, имѣемъ уравненія *Hertz'a* <sup>2)</sup> и *v. Helmholtz'a* <sup>3)</sup>:

извѣстно,  $J = \frac{(1-N)^2 + K^2}{(1+N)^2 + K^2}$ , гдѣ  $N, K$  суть показатели преломленія и поглощенія. Чтобы поверхность была черна, нужно, чтобы было  $J=0$ , откуда слѣдуетъ  $N=1, K=0$ , что указываетъ на оптическую тождественность обѣихъ средъ. Отсюда ясно, что если какое либо тѣло является намъ чернымъ при соприкосновеніи съ другими двумя различными (оптически) тѣлами, то оно не можетъ быть оптически однороднымъ тѣломъ. Это заключеніе совершенно согласно съ тѣмъ опытнымъ фактомъ, что всѣ настоящія черныя тѣла (сажа, платиновая чернь) въ чрезвычайно сильной степени пористы. Поэтому сажу въ воздухѣ напр. опредѣляютъ, какъ воздухъ, загрязненный приблизительно 2% (по объему) посторонняго тѣла (угля). Невольно напрашивается представленіе о черномъ тѣлѣ, какъ рядѣ «полныхъ» тѣлъ (Hohlkörper). Ср. *Kurlbaum*, Wied. Ann. pp. 855—856, 1899.

<sup>1)</sup> *Hertz*, Wied. Ann. 41 p. 398, 1890.

<sup>2)</sup> *Hertz*, l. c. p. 374.

<sup>3)</sup> *v. Helmholtz*, Wied. Ann. 47 p. 13, 1892.

$$A_u \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\beta L - \alpha M) - \frac{\partial}{\partial z} (\alpha N - \gamma L) + \alpha \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) \right\} = \\ = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$A_v \left\{ \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma M - \beta N) - \frac{\partial}{\partial x} (\beta L - \alpha M) + \beta \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) \right\} = \\ = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$A_w \left\{ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha N - \gamma L) - \frac{\partial}{\partial y} (\gamma M - \beta N) + \gamma \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) \right\} = \\ = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

и далѣе

$$A_\varepsilon \left\{ \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\beta X - \alpha Y) - \frac{\partial}{\partial z} (\alpha Z - \gamma X) + \alpha \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right\} = \\ = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A_u$$

$$A_\varepsilon \left\{ \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma Y - \beta Z) - \frac{\partial}{\partial x} (\beta X - \alpha Y) + \beta \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right\} = \\ = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} - 4\pi A_v$$

$$A_\varepsilon \left\{ \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha Z - \gamma X) - \frac{\partial}{\partial y} (\gamma Y - \beta Z) + \gamma \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right\} = \\ = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A_w.$$

2. Мы начнемъ съ вывода ponderomotorныхъ силъ внутри нашей среды и попробуемъ сдѣлать этотъ выводъ нѣсколько инымъ путемъ, чѣмъ тѣ, которыми шли *Hertz* и *v. Helmholtz*. Дѣло въ томъ, что *v. Helmholtz*, пользуясь принципомъ наи-

меньшаго дѣйствія, былъ вынужденъ ограничить свое изслѣдованіе случаемъ *непроводника* ( $u=v=w=0$ ); что же касается *Hertz'a*, то выводъ послѣднего покоится между прочимъ на совершенно произвольномъ допущеніи, будто внутри среды никакихъ иныхъ силъ, кромѣ давленій на стороны элементарнаго объема нѣтъ. Нашъ выводъ свободенъ отъ этихъ ограниченій: изъ него допущеніе *Hertz'a*, вытекаетъ какъ обязательное. Но этого мало. Какъ извѣстно *Wien* <sup>1)</sup> пытался обобщить извѣстную теорему *Poynting'a* на случай, когда внутри среды есть движеніе ( $\alpha, \beta, \gamma$ ). Это обобщеніе *Wien* нашелъ необходимымъ ограничить случаемъ діэлектриковъ. Нашъ выводъ даетъ и это обобщеніе безъ всякихъ ограниченій.

3. Умножимъ наши уравненія каждое на  $\frac{1}{4\pi A} d\Omega$ , гдѣ  $d\Omega$  есть элементъ объема, а потомъ соответственно на  $L, M, N, X, Y, Z$ , сложимъ и проинтегрируемъ по нѣкоторому объему съ постоянными  $\epsilon, \mu$ , ограниченному замкнутой поверхностью  $S$ . Тогда въ правой части мы получимъ два интеграла, изъ которыхъ первый интеграціей по частямъ легко преобразуемъ въ интегралъ по поверхности—именно въ извѣстный интегралъ *Poynting'a*

$$-\frac{1}{4\pi A} \int \int dS \left\{ (NY - MZ) \cos nx + (LZ - NX) \cos ny + (MX - LY) \cos nz \right\}.$$

гдѣ  $n$  есть внутренняя нормаль.

Такимъ образомъ мы имѣемъ, оставляя въ правой части лишь этотъ интегралъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int d\Omega \left\{ \frac{\epsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2) \right\} + \\ + \int \int \int d\Omega (uX + vY + wZ) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> *Wien. Wied. Ann.* 47 p. 337, 1892.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4\pi} \iiint \mu d\Omega \left\{ (M^2 + N^2) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (N^2 + L^2) \frac{\partial \beta}{\partial y} + (L^2 + M^2) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right. \\
 & \quad \left. - \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) LM - \left( \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) MN - \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) NL \right\} + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \iiint \epsilon d\Omega \left\{ (Y^2 + Z^2) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (Z^2 + X^2) \frac{\partial \beta}{\partial y} + (X^2 + Y^2) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right. \\
 & \quad \left. - \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) XY - \left( \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) YZ - \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) ZX \right\} \\
 & + \frac{1}{4\pi} \iiint d\Omega \left\{ \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu(L^2 + M^2 + N^2) + \epsilon(X^2 + Y^2 + Z^2) \right] + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(L^2 + M^2 + N^2) + \epsilon(X^2 + Y^2 + Z^2) \right] + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu(L^2 + M^2 + N^2) + \epsilon(X^2 + Y^2 + Z^2) \right] \right\} = \\
 & = \frac{1}{4\pi A} \int \int dS \left\{ (MZ - NY) \cos nx + (NX - LZ) \cos ny + (LY - MX) \cos nz \right\}.
 \end{aligned}$$

Очевидно нашъ приемъ совершенно аналогиченъ тому, кажимъ пользуются два полученія теоремы *Poynting'a*, если  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

4. Обратимъ теперь вниманіе на физическое значеніе различныхъ членовъ полученнаго выраженія.

Первый членъ—это очевидно измѣненіе энергіи объема въ единицу времени; второй членъ даетъ энергію, превращаемую по закону Джоуля въ теплоту; третій и четвертый члены представляютъ собою работу внутреннихъ пондеромоторныхъ силъ, дѣйствующихъ какъ *давленія* на стороны элементарнаго параллелепипеда; наконецъ правая часть даетъ энергію, втекающую въ объемъ черезъ поверхность *S*. У насъ

остается еще одинъ объемный интегралъ—пятый,—отъ смысла котораго зависитъ и величина искомыхъ пондеромоторныхъ силъ.

Прежде всего возникаетъ мысль разсматривать этотъ интегралъ, какъ работу силъ, дѣйствующихъ на элементъ объема (подобно напр. тяжести). И это толкованіе было бы правильно, если бы оно не привело насъ къ противорѣчію съ опытомъ.

Допуская на время такое толкованіе, мы легко интеграціей по частямъ преобразуемъ наши третій и четвертый интегралъ въ нѣкоторый интегралъ того же типа, какъ интересующій насъ пятый,—т. е. содержащій просто  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , а не ихъ производныя, и въ нѣкоторый интегралъ по поверхности  $S$ . Понтеромоторныя силы, развивающіяся въ нашемъ тѣлѣ сведутся къ нѣкоторымъ „объемнымъ“ силамъ (множители при  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  подъ тройнымъ интеграломъ) и нѣкоторымъ „поверхностнымъ“ силамъ — (множители при  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  подъ двойнымъ интеграломъ). Тѣ и другія силы выражаются очевидно *только* черезъ  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , т. е. *явно* не зависятъ ни отъ времени, ни отъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Отсюда слѣдуетъ, что по формѣ эти силы остаются тѣ же и тогда, когда среда въ покоѣ, и тогда, когда разсматриваемыя явленія суть статическія. Въ этихъ послѣднихъ случаяхъ силы „объемныя“ исчезаютъ вовсе; остаются силы только поверхностныя, *но не такія, какія можно вывести для этихъ случаевъ обычнымъ путемъ*, и какія выведены *Maxwell*-емъ, *v. Helmholtz*-емъ, *Шиллеромъ*, и какія какъ извѣстно согласны, въ доступныхъ изслѣдованію случаяхъ, съ опытомъ. Отсюда слѣдуетъ: *допуская, что выведенныя до сихъ поръ для случаевъ равновѣсія наэлектризованныхъ и намагниченныхъ тѣлъ пондеромоторныя силы выведены вѣрно*, мы должны

дать нашему пятому интегралу *иное* толкованіе; именно, интегрируя по частямъ, разобьемъ его на два интеграла

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{8\pi} \iint dS \left\{ \mu(L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon(X^2 + Y^2 + Z^2) \right\} \chi \\
 & \quad (a \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz) \\
 & -\frac{1}{8\pi} \iiint d\Omega \left\{ \mu(L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon(X^2 + Y^2 + Z^2) \right\} \chi \\
 & \quad \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

и изъ нихъ лишь послѣдній намъ приходится разсматривать, какъ работу пондеромоторныхъ силъ. Тогда первый остается толковать какъ обобщеніе теоремы *Poynting*'а на случай движенія. Тогда мы и получаемъ и работу интересующихъ насъ силъ въ формѣ, данной ей *Hertz*'емъ, и обобщеніе *Wien*'а, независимо отъ электропроводности среды.

5. Эта работа будетъ

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{8\pi} \iiint d\Omega \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} \left[ \mu(-L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon(-X^2 + Y^2 + Z^2) \right] \right. \\
 & \quad - 2 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) (\mu LM + \varepsilon XY) \\
 & \quad + \frac{\partial \beta}{\partial y} \left[ \mu(L^2 - M^2 + N^2) + \varepsilon(X^2 - Y^2 + Z^2) \right] \\
 & \quad - 2 \left( \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) (\mu MN + \varepsilon YZ) \\
 & \quad + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \left[ \mu(L^2 + M^2 - N^2) + \varepsilon(X^2 + Y^2 - Z^2) \right] \\
 & \quad \left. - 2 \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) (\mu NL + \varepsilon ZX) \right\}
 \end{aligned}$$

или, вводя сюда обозначенія,

$$X_x = \frac{\mu}{8\pi}(-L^2 + M^2 + N^2) + \frac{\varepsilon}{8\pi}(-X^2 + Y^2 + Z^2);$$

$$Y_y = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 - M^2 + N^2) + \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 - Y^2 + Z^2);$$

$$Z_z = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 - N^2) + \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 - Z^2);$$

$$X_y = Y_x = -\frac{\mu}{4\pi}LM - \frac{\varepsilon}{4\pi}XY$$

$$Y_z = X_z = -\frac{\mu}{4\pi}MN - \frac{\varepsilon}{4\pi}YZ$$

$$Z_x = X_z = -\frac{\mu}{4\pi}NL - \frac{\varepsilon}{4\pi}ZX,$$

имѣемъ

$$\iiint d\Omega \left\{ X_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + Y_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + Z_z \frac{\partial \gamma}{\partial z} + X_y \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + Y_z \left( \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) + Z_x \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \right\},$$

а послѣ выполненія интеграціи по частямъ получимъ выраженіе работы въ видѣ

$$- \iiint d\Omega \left\{ \alpha \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \beta \left( \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_y}{\partial z} \right) + \gamma \left( \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) \right\} \\ - \int \int dS \left\{ \bar{\alpha} (\bar{X}_x \cos nx + \bar{X}_y \cos ny + \bar{X}_z \cos nz) + \right. \\ \bar{\beta} (\bar{Y}_x \cos nx + \bar{Y}_y \cos ny + \bar{Y}_z \cos nz) + \\ \left. \bar{\gamma} (\bar{Z}_x \cos nx + \bar{Z}_y \cos ny + \bar{Z}_z \cos nz) \right\}.$$



Отсюда видно, что интересующія насъ пюндеромоторныя силы сводятся къ двумъ типамъ силъ: силы, дѣйствующія на элементъ объема *внутри* среды, со слагающими

$$H = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_x}{\partial y} - \frac{\partial Z_x}{\partial z}$$

$$H = -\frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_y}{\partial z}$$

$$Z = -\frac{\partial X_z}{\partial x} - \frac{\partial Y_z}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}$$

и силы, дѣйствующія на всякой пограничной поверхности, со слагающими

$$\bar{H}_n = -\bar{X}_x \cos nx - \bar{X}_y \cos ny - \bar{X}_z \cos nz$$

$$\bar{H}_n = -\bar{Y}_x \cos nx - \bar{Y}_y \cos ny - \bar{Y}_z \cos nz$$

$$\bar{Z}_n = -\bar{Z}_x \cos nx - \bar{Z}_y \cos ny - \bar{Z}_z \cos nz,$$

гдѣ  $\bar{X}_x, \dots$  обозначаетъ значенія  $X_x$  внутри среды, но безконечно близко къ границѣ.

6. Пусть наша среда находится въ покое; тогда вездѣ  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Пусть далѣе мы создали въ этой средѣ электромагнитное возмущеніе, выражаемое обычными уравненіями для покоящейся среды,

$$A\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi Au$$

$$A\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi Av$$

$$A\mu \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi Aw$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

это будутъ начальныя условія задачи.

Вводя  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  въ уравненія упругости геср. въ уравненія движенія тѣлъ въ качествѣ *опытныхъ силъ*, а  $\Xi$ ,... подобнымъ же образомъ въ пограничныя условія, мы получимъ уравненія, которыя вмѣстѣ съ 6-ю, дающими связь между  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , послужатъ намъ для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ 9 величинъ.

Задача, какъ видимъ, крайне сложная, но которая значительно упрощается, если мы примемъ въ соображеніе нѣкоторыя обстоятельства.

Пусть начальныя  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соотвѣтствуютъ *правильнымъ свѣтовымъ колебаніямъ* т. е. стаціонарнымъ волнамъ періода  $T$ . Амплитуды у электромагнитныхъ векторовъ въ этомъ случаѣ крайне малы;  $X$ ,... суть величины второй степени относительно амплитудъ, они будутъ поэтому сами малыми величинами второго порядка. Таковы же поэтому будутъ и  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$ , и они вызовутъ въ средѣ упругія колебанія періода  $\frac{T}{2}$ , каковыя, благодаря инерціи среды, даже въ случаѣ очень разрѣженныхъ газовъ опыту будутъ совершенно недоступны <sup>1)</sup>. Только въ „чистомъ“ эфирѣ эти  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  могутъ имѣть значеніе, и только тамъ поэтому представляется интереснымъ изслѣдовать, каковы могутъ быть эти скорости. Такое изслѣдованіе было отчасти произведено, какъ извѣстно, *в. Helmholtz'емъ* <sup>2)</sup>.

Благодаря этимъ соображеніямъ, мы можемъ вовсе пренебречь вліяніемъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  на величины  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ : свѣтотыя волны движеніемъ среды въ такомъ случаѣ возмущены не будутъ. Тогда намъ остается изслѣдовать лишь тѣ деформаціи геср. движенія среды, какія будутъ обусловлены

---

<sup>1)</sup> Ср. *Hertz*, Wied. Ann. 41 p. 398, 1890 и *в. Helmholtz*, Wied. Ann. 53 p. 139, 1894.

<sup>2)</sup> *в. Helmholtz* l. c.

средними за периодъ  $T$  значеніями  $X_x, \dots$ , т. е. величинами

$$\bar{X}_x = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X_x dt \text{ и т. д.}$$

Тогда очевидно будетъ и

$$\bar{\Xi} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Xi dt \text{ и т. д.,}$$

а производя эту операцію надъ уравненіями упругости, мы освободимся вовсе отъ  $\alpha, \beta, \gamma$  и получимъ обычныя уравненія равновѣсія упругихъ тѣлъ.

7. При сдѣланныхъ упрощеніяхъ, т. е. пренебрегая вліяніемъ  $\alpha, \beta, \gamma$  на электромагнитные векторы, мы можемъ вычислить  $\Xi, H, Z$ , пользуясь уже упрощенными уравненіями электромагнитной теоріи. Именно, выполняя въ выраженіи для  $\Xi$  дифференцированіе, мы получаемъ

$$\begin{aligned} \Xi = & \frac{\mu}{4\pi} L \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon}{4\pi} X \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\mu}{4\pi} M \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\varepsilon}{4\pi} Y \left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\mu}{4\pi} N \left( \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) + \frac{\varepsilon}{4\pi} Z \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

а вводя сюда вмѣсто выраженій въ скобкахъ ихъ значенія изъ уравненій для покоящейся среды, получимъ

$$\Xi = \frac{A\varepsilon\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (MZ - NY) + A\mu (Mw - Nv)$$

$$H = \frac{A\varepsilon\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (NX - LZ) + A\mu (Nu - Lw)$$

$$Z = \frac{A\varepsilon\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (LY - MX) + A\mu (Lv - Mu).$$

Тогда имеемъ

$$u = \frac{X}{\kappa}, \quad v = \frac{Y}{\kappa}, \quad w = \frac{Z}{\kappa},$$

гдѣ  $\kappa$  есть удѣльное сопротивленіе среды, то, полагая для краткости

$$MZ - NY = \xi, \quad NX - LZ = \eta, \quad LY - MX = \zeta,$$

имѣемъ

$$\Xi = \frac{A\epsilon\mu}{4\pi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{4\pi}{\epsilon\kappa} \xi \right)$$

$$H = \frac{A\epsilon\mu}{4\pi} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{4\pi}{\epsilon\kappa} \eta \right)$$

$$Z = \frac{A\epsilon\mu}{4\pi} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{4\pi}{\epsilon\kappa} \zeta \right).$$

Отсюда получаемъ между прочимъ интересный результатъ, что наши силы исчезаютъ, когда  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  таковы, что напр.

$$\xi = \xi_0 e^{-\frac{4\pi}{\epsilon\kappa} t}, \quad \xi_0 = F(x, y, z);$$

дальше очевидно  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  суть слагающія известнаго вектора *Poynting*'а и мы отсюда видимъ, что  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  связаны съ движеніемъ энергій и въ случаѣ проводниковъ (для эфира это обнаружено *v. Helmholtz*'емъ).

Умножая ур. для  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  на  $\frac{dt}{T}$  и интегрируя на періодъ колебанія, имѣемъ только

$$\tilde{\Xi} = A\mu (\tilde{M}w - \tilde{N}v)$$

$$\tilde{H} = A\mu (\tilde{N}w - \tilde{L}v)$$

$$\tilde{Z} = A\mu (\tilde{L}v - \tilde{M}u),$$

такъ какъ первые члены послѣ интеграціи исчезнуть, и мы видимъ, что въ диэлектрикахъ ( $\kappa = \infty$ ) никакихъ „объемныхъ“ силъ при нашихъ условіяхъ не будетъ.

8. Въ дальнѣйшемъ мы разъ навсегда условимся подъ величинами  $X_x, \dots, X^2, \dots, L^2, \dots, \Xi, \dots, \overline{\Xi}_n$  понимать именно эти средія за періодъ значенія. Тогда, разъ намъ даны  $L, M, N, X, Y, Z$ , намъ сейчасъ извѣстны  $\Xi, \dots, \overline{\Xi}_n$  и задача о деформации и движеніи среды подъ дѣйствіемъ свѣта переходитъ всецѣло въ область механики.

Въ качествѣ примѣра мы разберемъ случай плоскихъ свѣтовыхъ волнъ.

Пусть плоскость  $z=0$  есть граница двухъ средъ; въ средѣ отрицательныхъ  $z$  идетъ плоская свѣтовая волна, поляризованная въ плоскости паденія ( $yz$ ); на границѣ  $z=0$  происходитъ отраженіе и преломленіе.

Пусть въ первой средѣ электропроводности нѣтъ вовсе, т. е. для нея  $\kappa = \infty$ . Тогда въ этой средѣ по предъидущему нѣтъ вовсе внутреннихъ силъ, т. е.

$$\Xi = 0, H = 0, Z = 0.$$

Полагая далѣе вездѣ

$$Y = Z = 0, L = 0,$$

имѣемъ въ нашей средѣ для всякой точки

$$X_x = \frac{\mu}{8\pi} (M^2 + N^2) - \frac{\varepsilon}{8\pi} X^2; \quad X_y = 0$$

$$Y_y = \frac{\mu}{8\pi} (-M^2 + N^2) + \frac{\varepsilon}{8\pi} X^2; \quad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi} MN$$

$$Z_x = \frac{\mu}{8\pi} (M^2 - N^2) + \frac{\varepsilon}{8\pi} X^2; \quad Z_z = 0.$$

На границѣ  $z=0$  будемъ имѣть

$$\begin{aligned}\overline{X}_z &= \frac{\mu}{8\pi} (\overline{M}^2 + \overline{N}^2) - \frac{\varepsilon}{8\pi} \overline{X}^2, & \overline{X}_y &= 0 \\ \overline{Y}_z &= \frac{\mu}{8\pi} (-\overline{M}^2 + \overline{N}^2) + \frac{\varepsilon}{8\pi} \overline{X}^2, & \overline{Y}_x &= -\frac{\mu}{4\pi} \overline{MN} \\ \overline{Z}_z &= \frac{\mu}{8\pi} (\overline{M}^2 - \overline{N}^2) + \frac{\varepsilon}{8\pi} \overline{X}^2, & \overline{Z}_x &= 0.\end{aligned}$$

Пусть  $X_0$ ,  $M_0$ ,  $N_0$  относятся къ падающей,  $X_r$ ,  $M_r$ ,  $N_r$  къ отраженной волнѣ; тогда легко видѣть, что, обозначая  $\varphi$  уголъ паденія, полагая,

$$\begin{aligned}X_0 &= \mathfrak{A}_0 \cos 2\pi \left( \frac{z \cos \varphi + y \sin \varphi}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \\ X_r &= \mathfrak{A}_r \cos \left[ 2\pi \left( \frac{-z \cos \varphi + y \sin \varphi}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \delta \right]\end{aligned}$$

и считая  $\mathfrak{A}_r$  всегда положительнымъ, будемъ имѣть въ среднемъ за періодъ для  $z=0$

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{8\pi} \overline{X}^2 &= \frac{\varepsilon}{8\pi} (\overline{X}_0 + \overline{X}_r)^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 + 2\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_r \cos \delta) \\ \frac{\mu}{8\pi} \overline{M}^2 &= \frac{\mu}{8\pi} (\overline{M}_0 + \overline{M}_r)^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 - 2\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_r \cos \delta) \cos^2 \varphi \\ \frac{\mu}{8\pi} \overline{N}^2 &= \frac{\mu}{8\pi} (\overline{N}_0 + \overline{N}_r)^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 + 2\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_r \cos \delta) \sin^2 \varphi \\ \frac{\mu}{4\pi} \overline{MN} &= \frac{\mu}{4\pi} (\overline{M}_0 + \overline{M}_r) (\overline{N}_0 + \overline{N}_r) = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathfrak{A}_0^2 - \mathfrak{A}_r^2) \sin 2\varphi.\end{aligned}$$

Положимъ далѣе

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{A}_0^2 = e_0, \quad \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{A}_r^2 = e_r;$$

$e_0, e_r$  будутъ для падающаго и для отраженнаго луча энергій единицы объема. Тогда получаемъ

$$\begin{aligned}\overline{X}_z &= -2\sqrt{e_0 e_r} \cos \delta \cos^2 \varphi & \overline{X}_y &= 0 \\ \overline{Y}_y &= 2\sqrt{e_0 e_r} \cos \delta + (e_0 + e_r) \sin 2\varphi & \overline{Y}_z &= \frac{1}{2} (e_0 - e_r) \sin 2\varphi \\ \overline{Z}_x &= (e_0 + e_r) \cos^2 \varphi & \overline{Z}_z &= 0.\end{aligned}$$

Такъ какъ у насъ теперь для  $z=0$

$$\cos nx = 0, \cos ny = 0, \cos nz = -1,$$

то будетъ

$$\overline{H}_n = 0, \overline{H}_z = \overline{Y}_x, \overline{Z}_n = \overline{Z}_x,$$

или же

$$\overline{H}_n = 0, \quad \overline{H}_z = \frac{1}{2} (e_0 - e_r) \sin 2\varphi; \quad \overline{Z}_n = (e_0 + e_r) \cos^2 \varphi.$$

Равнодѣйствующая этихъ силъ есть давленіе  $p$ , образующее съ нормалью къ границѣ уголъ  $\psi$ , при чемъ

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{e_0 - e_r}{e_0 + e_r} \operatorname{tg} \varphi$$

$$p = \cos \varphi \sqrt{e_0^2 + e_r^2 + 2e_0 e_r \cos 2\varphi}.$$

Введемъ сюда отражательную способность второй среды для

угла  $\varphi$ ,  $J_\varphi = \frac{e_r}{e_0}$ ; тогда получимъ

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1 - J_\varphi}{1 + J_\varphi} \operatorname{tg} \varphi$$

$$p = e_0 \cos \varphi \sqrt{1 + J_\varphi^2 + 2J_\varphi \cos 2\varphi}.$$

Для случая идеальнаго отраженія будетъ  $J_\varphi=1$ ; тогда

$$\operatorname{tg}\psi=0; \psi=0$$

$$p=2e_0\cos^2\varphi \quad ^1)$$

и давленіе нормально къ плоскости  $z=0$ ; для абсолютно чернаго тѣла надо взять  $J_\varphi=0$  и тогда

$$\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\varphi, \psi=\varphi$$

$$p=e_0\cos\varphi,$$

т. е. давленіе направлено по нормали волны; наконецъ для нормальнаго паденія  $\varphi=0$  и мы имѣемъ

$$\operatorname{tg}\psi=0, \psi=0$$

$$p=e_0(1+J_0).$$

При  $J_0=0$  и  $J_0=1$  имѣемъ здѣсь результатъ *Maxwell-Boltzmann*'а.

9. Пусть падающіе лучи образуютъ собою круглый цилиндръ съ осью, проходящей черезъ начало координатъ. Этотъ цилиндръ пересѣчетъ плоскость  $z=0$  по эллипу, оси котораго направлены по  $y$  и  $x$ ; подобные же цилиндры образуютъ лучи отраженные и преломленные. Для цилиндрическаго пучка падающихъ лучей *они точекъ пересѣченія этихъ лучей съ лучами отраженными будетъ*

$$X_z=0$$

$$X_y=0$$

$$Y_y=e_0\sin^2\varphi$$

$$Y_x=e_0\sin\varphi\cos\varphi$$

$$Z_x=e_0\cos^2\varphi$$

$$Z_z=0;$$

оставляя прежнее начало координатъ и прежнюю ось  $x$ , возъ-

---

<sup>1)</sup> Ср. соображенія *Вольтманн*'а, I. с. р. 292.



немъ новую ось  $z'$  по оси разсматриваемаго цилиндра, а ось  $y'$  къ ней перпендикулярно въ плоскости  $yz$ . Тогда углы ( $zz'$ ) и ( $yy'$ ) будутъ равны  $\varphi$ , и вводя обозначенія  $X'_x, \dots$  для слагающихъ уругихъ силъ по новымъ осямъ, получаемъ извѣстный еще со временъ *Maxwell*'а результатъ

$$\begin{aligned} X'_x &= 0 & X'_y &= 0 \\ Y'_y &= 0 & Y'_x &= 0 \\ Z'_x &= e_n & Z'_z &= 0, \end{aligned}$$

а потому на боковой поверхности разсматриваемаго цилиндра силы

$$\begin{aligned} \bar{E}'_n &= -\bar{X}'_x \cos nx' - \bar{X}'_y \cos ny' - \bar{X}'_z \cos nz' \\ \bar{H}'_n &= -\bar{Y}'_x \cos nx' - \bar{Y}'_y \cos ny' - \bar{Y}'_z \cos nz' \\ \bar{Z}'_n &= -\bar{Z}'_x \cos nx' - \bar{Z}'_y \cos ny' - \bar{Z}'_z \cos nz' \end{aligned}$$

всѣ обращаются въ нуль. Очевидно то же заключеніе справедливо и для боковой поверхности цилиндра отраженныхъ лучей—опять таки за исключеніемъ выше упомянутыхъ точекъ.

Такимъ образомъ все вліяніе первой среды сводится къ вычисленному нами давленію на плоскости  $z=0$  и сверхъ того къ нѣкоторымъ силамъ въ точкахъ, общихъ обѣимъ разсматриваемымъ боковымъ поверхностямъ цилиндровъ.

10. Обращаемся къ роли свѣтовыхъ процессовъ во второй средѣ и будемъ представлять послѣднюю себѣ какъ свѣтопоглощающее *твердое* тѣло, имѣющее форму пластинки; ея основаніемъ будетъ плоскость  $z=0$ , а высоту  $h$  мы выберемъ такъ, чтобы преломленные лучи не достигали плоскости  $z=h$ ; будемъ также предполагать пластинку настолько широкой, что преломленные лучи не доходятъ и до ея боковой поверхности. Если теперь наша пластинка неподвижна, то подѣ дѣйствіемъ

силъ  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  внутри нея и силъ  $\bar{\Xi}_n$ ,  $\bar{H}_n$ ,  $\bar{Z}_n$  на переднемъ основаніи и на боковой поверхности цилиндра, образуемаго внутри пластинки преломленными лучами, эта послѣдняя будетъ деформироваться. Окончательное давленіе, которому будетъ подвержена плоскость  $z=0$  въ освѣщаемыхъ точкахъ будетъ слагаться: изъ опредѣленнаго уже нами давленія  $p$ ; изъ силъ  $\bar{\Xi}_n = -\bar{X}_x$ ,  $\bar{H}_n = -\bar{Y}_x$ ,  $\bar{Z}_n = -\bar{Z}_x$  (ибо  $\cos n z = 1$ ), и изъ силъ, появляющихся здѣсь вслѣдствіе упругой реакціи вещества пластинки. Опредѣленіе этихъ послѣднихъ вообще, какъ извѣстно, задача довольно сложная, особенно въ нашемъ случаѣ косою паденія. Мы рассчитываемъ имѣть случай вернуться въ этой задачѣ въ другое время, тѣмъ болѣе, что она сама практическаго интереса не представляетъ, ибо наблюдать свѣтовое давленіе удобнѣе всего на *подвижныхъ* пластинкахъ, когда деформация не имѣетъ значенія. Теперь же замѣтимъ лишь, что даже и въ случаѣ нормальнаго паденія нѣтъ повода ожидать, чтобы пластинка не измѣняла нашей величины  $p$  на плоскости  $z=0$ .

11. Любопытно при этомъ, что силы  $X_x$  и  $Y_y$  не исчезаютъ даже и въ случаѣ нормальнаго паденія на свѣто-поглощающую пластинку. Дѣйствительно, беря для падающаго луча въ этомъ случаѣ (по прежнему вездѣ  $Y=Z=L=N=0$ )

$$X_0 = \mathfrak{A}_0 \cos 2\pi \left( \frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right),$$

будемъ имѣть для преломленнаго луча

$$X = \mathfrak{A} \mathfrak{A}_0 e^{-\frac{2\pi K z}{\lambda}} \cos 2\pi \left( \frac{z N}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right),$$

гдѣ  $\lambda$  длина волны внѣ пластинки, а  $K, N$  показатели поглощенія и преломленія пластинки *относительно* первой среды.

Тогда получимъ легко

$$M = \mathfrak{B} e^{-\frac{2\pi Kz}{\lambda}} \cos 2\pi \left( \frac{zN}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right) + \mathfrak{C} e^{-\frac{2\pi Kz}{\lambda}} \sin 2\pi \left( \frac{zN}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right)$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{\mu} \mathfrak{A} \mathfrak{A}_0 N N_0, \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{A} \mathfrak{A}_0 K N_0,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu} (N^2 - K^2) N_0^2, \quad \frac{2T}{\chi} = \frac{1}{\mu} 2NK.N_0^2,$$

гдѣ  $N_0$  абсолютный показатель преломленія первой среды.

Далѣе вычисляемъ въ среднемъ за періодъ  $T$

$$\frac{\mu}{8\pi} M^2 = \frac{1}{16\pi\mu} \mathfrak{A}^2 \mathfrak{A}_0^2 (N^2 + K^2) N_0^2 e^{-\frac{4\pi Kz}{\lambda}}$$

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} X^2 = \frac{1}{16\pi\mu} \mathfrak{A}^2 \mathfrak{A}_0^2 (N^2 - K^2) N_0^2 e^{-\frac{4\pi Kz}{\lambda}},$$

а называя  $e_0$  энергію единицы объема въ падающихъ лучахъ, имѣемъ при  $\varepsilon_0 \mu_0 = N_0^2$ ,

$$e_0 = \frac{\varepsilon_0}{8\pi} \mathfrak{A}_0^2 = \frac{N_0^2}{8\pi\mu_0} \mathfrak{A}_0^2$$

и потому

$$\frac{\mu}{8\pi} M^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\mu} \mathfrak{A}^2 (N^2 + K^2) e_0 e^{-\frac{4\pi Kz}{\lambda}}$$

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} X^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\mu} \mathfrak{A}^2 (N^2 - K^2) e_0 e^{-\frac{4\pi Kz}{\lambda}},$$

а стало быть

$$X_x = \frac{\mu_0}{\mu} \mathfrak{A}^2 K^2 e_0 e^{-\frac{4\pi Kz}{\lambda}}$$

$$Y_y = -\frac{\mu_0}{\mu} \mathfrak{A}^2 K^2 e_0 e^{-\frac{4\pi Kz}{\lambda}}$$

$$Z_z = \frac{\mu_0}{\mu} \mathfrak{A}^2 N^2 e_0 e^{-\frac{4\pi Kz}{\lambda}}$$

$$X_y = Y_x = Z_x = 0,$$

гдѣ по известнымъ формуламъ отраженія

$$\mathfrak{A}' = \frac{4(1+N)^2}{[(1+N)^2 + K^2]^2}.$$

Отсюда и видимъ, что дѣло сведется къ одной силѣ  $Z_x$  по нормали волны, только если  $K=0$ . Интересно также, что теперь  $X_x = -Y_y$ .

12. Наша задача значительно упрощается, если мы представимъ себѣ пластинку совершенно подвижной, а первую среду жидкой; тогда придется опредѣлить лишь тѣ равнодѣйствующія силу и пару, которыя движутъ пластинку, какъ *цѣлое*. Но легко видѣть, что до свойства силъ  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  и  $\Xi_n$ ,  $\bar{H}_n$ ,  $\bar{Z}_n$ , обусловленныхъ свѣтовыми процессами *снаружи* пластинки, такихъ равнодѣйствующихъ дѣтъ, ибо

$$\iint \Xi_n dS + \iiint \Xi d\Omega = - \iint \Xi d\Omega + \iint \Xi d\Omega = 0$$

и

$$\iint (y\bar{\Xi}_n - x\bar{H}_n) dS + \iiint (y\Xi - xH) d\Omega = 0$$

и точно также для другихъ слагающихъ.

При этомъ способѣ наблюденія, стало быть, мы не измѣряемъ *полнаго* свѣтоваго давленія, а только ту его часть, которая обусловлена свѣтовымъ движеніемъ въ первой средѣ, и которая при соблюденіи известныхъ условій оказывается дѣйствительно согласной съ утвержденіемъ *Maxwell'*а въ art. 793.

13. Мы видѣли, что въ точкахъ, общихъ боковымъ поверхностямъ обоихъ цилиндрическихъ пучковъ лучей,—падающихъ и отраженныхъ—есть нѣкоторыя силы. Интересно ихъ опредѣлить для того случая, когда оба цилиндра совпадаютъ, т. е. для случая *нормально* паденія на поглощающую свѣтъ пластинку. Тогда легко найти въ среднемъ за періодъ

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} X^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{8\pi} \left\{ \mathfrak{U}_0^2 + \mathfrak{U}_r^2 + 2\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_r \cos \left( \frac{4\pi z}{\lambda} - \delta \right) \right\}$$

$$\frac{\mu}{8\pi} M^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{8\pi} \left\{ \mathfrak{U}_0^2 + \mathfrak{U}_r^2 - 2\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_r \cos \left( \frac{4\pi z}{\lambda} - \delta \right) \right\}$$

и потому будемъ имѣть

$$X_x = -2\sqrt{e_0 e_r} \cos \left( \frac{4\pi z}{\lambda} - \delta \right) \quad X_y = 0$$

$$Y_y = 2\sqrt{e_0 e_r} \cos \left( \frac{4\pi z}{\lambda} - \delta \right) \quad Y_x = 0$$

$$Z_x = e_0 + e_r \quad Z_x = 0,$$

такъ что на боковой поверхности цилиндра будетъ

$$\Xi_n = -X_x \cos nx, \quad \bar{H}_n = -Y_y \cos ny, \quad \bar{Z}_n = 0.$$

и опять здѣсь  $X_x = -Y_y$ ; соотвѣтственно образованію стоячей волны здѣсь въ цѣломъ рядѣ точекъ, гдѣ  $\cos \left( \frac{4\pi z}{\lambda} - \delta \right) = 0$  силы  $X_x, Y_y$  исчезаютъ.

14. Пусть теперь наша пластинка *діэлектрикъ*, окруженный со всѣхъ сторонъ діэлектрической жидкостью; пусть пластинка можетъ перемѣщаться по оси  $z$ ; мы беремъ *нормальное* паденіе ( $\varphi = 0$ ) и ищемъ движущія пластинку силы. По предыдущему онѣ зависятъ лишь отъ свѣтовыхъ процессовъ *оной* пластинки. Пусть  $e_1$  есть энергія единицы объема лучей, идущихъ отъ пластинки въ первой средѣ ( $z < 0$ ) и  $e_d$  энергія лучей, прошедшихъ пластинку.

Тогда интересующія насъ силы нормальны въ пластинкѣ и будутъ измѣряться соотвѣтственной энергіей лучей. Именно, имѣемъ

$$z=0 \text{ первая среда} \quad \bar{Z}_0 = e_0 + e_1$$

$$z=h \quad \quad \quad \bar{Z}_h = -e_d$$

и движущая пластинку по оси  $z$  сила, свѣтовое давленіе, будетъ

$$p = e_0 + e_1 - e_d.$$

Если  $J_0$  есть отражательная способность пластинки (для нормальнаго паденія), то какъ извѣстно

$$e_d = e_0 \frac{1 - J_0}{1 + J_0}$$

и потому, при

$$e_0 = e_1 + e_d,$$

будетъ

$$p = 2e_0 \left( 1 - \frac{1 - J_0}{1 + J_0} \right).$$

Если  $N$  есть показатель преломленія пластинки относительно окружающей среды, то

$$J_0 = \left( \frac{N - 1}{N + 1} \right)^2$$

и потому получимъ

$$p = 2e_0 \frac{(N - 1)^2}{N^2 + 1}.$$

Для стекла въ воздухѣ приблизительно  $N = 1.5$ ; для алмаза  $N = 2.5$ . Это даетъ въ первомъ случаѣ для свѣтового давленія

$$p = 0.15e_0$$

и во второмъ

$$p = 0.62e_0.$$

Если пластинка свѣтъ поглощаетъ, то, какъ мы видѣли, при нормальномъ паденіи

$$p = e_0(1 + J_0);$$

для полированной платины напр.  $J_0 = 0.70$ ; поэтому здѣсь будетъ

$$p = 1.7e_0$$

и эта величина въ 10 гезр. въ 3 раза болѣе, чѣмъ давленіе въ случаѣ стекла или алмаза.

Разумѣется въ разобранномъ сейчасъ случаѣ мы предполагаемъ пластинку достаточно толстой, чтобы можно было не считаться съ явленіями въ „тонкихъ“ пластинкахъ.

15. Представимъ себѣ теперь, что падающая волна у насъ поляризована не въ плоскости паденія, а нормально къ ней, т. е. что у насъ

$$X=0, M=0, N=0;$$

тогда будетъ

$$X_x = -\frac{\mu}{8\pi}L^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi}(Y^2 + Z^2) \quad X_y = 0$$

$$Y_y = +\frac{\mu}{8\pi}L^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi}(Z^2 - Y^2) \quad Y_x = -\frac{\varepsilon}{4\pi}YZ$$

$$Z_x = +\frac{\mu}{8\pi}L^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi}(Y^2 - Z^2) \quad Z_y = 0$$

и, поступая совершенно подобно прежнему, мы придемъ и къ прежнимъ результатамъ съ тою лишь разницей, что  $e_r$  а значить и  $J_\varphi$  будутъ теперь имѣть иной смыслъ. Откуда слѣдуетъ, что наши результаты *mutatis mutandis* останутся въ силѣ и для любого случая поляризаціи падающаго свѣта.

16. Остановимся теперь еще на одномъ интересномъ и легко разбираемомъ случаѣ. Именно пусть на нашу діэлектрическую пластинку падаетъ пучокъ параллельныхъ лучей, поляризованныхъ перпендикулярно къ плоскости паденія и подъ угломъ поляризаціи  $\bar{\varphi}$ . Тогда не будетъ отраженныхъ лучей ни на первой границѣ ( $z=0$ ), ни на второй ( $z=h$ ) и мы имѣемъ:

$$\begin{array}{ll} \text{падающій лучъ:} & X_x=0 \quad X_y=0 \\ & Y_y=e_0 \sin^2 \bar{\varphi} \quad Y_x=e_0 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \\ & Z_x=e_0 \cos^2 \bar{\varphi} \quad Z_y=0; \end{array}$$

|                    |                                  |                                                     |
|--------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------------|
| преломленный лучъ: | $X_x=0$                          | $X_y=0$                                             |
|                    | $Y_y=e_1 \sin^2 \bar{\varphi}_1$ | $Y_x=e_1 \sin \bar{\varphi}_1 \cos \bar{\varphi}_1$ |
|                    | $Z_x=e_1 \cos^2 \bar{\varphi}_1$ | $Z_y=0;$                                            |
| вышедшій лучъ:     | $X_x=0$                          | $X_y=0$                                             |
|                    | $Y_y=e_0 \sin^2 \bar{\varphi}$   | $Y_x=e_0 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}$     |
|                    | $Z_x=e_0 \cos^2 \bar{\varphi}$   | $Z_y=0.$                                            |

На боковыхъ поверхностяхъ цилиндрическихъ пучковъ свѣтовыхъ лучей по предыдущему никакихъ силъ нѣтъ; остаются силы на плоскостяхъ  $z=0$  и  $z=h$ , именно:

|                     |                                                                                                                |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $z=0$ внѣ пластинки | $\bar{H}_n=0, \bar{H}_n=e_0 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}; \bar{Z}_n=e_0 \cos^2 \bar{\varphi}$         |
| $z=0$ внутри "      | $\bar{H}_n=0, \bar{H}_n=-e_0 \sin \bar{\varphi}_1 \cos \bar{\varphi}_1; \bar{Z}_n=-e_0 \cos^2 \bar{\varphi}_1$ |
| $z=h$ внутри "      | $\bar{H}_n=0, \bar{H}_n=e_0 \sin \bar{\varphi}_1 \cos \bar{\varphi}_1; \bar{Z}_n=e_0 \cos^2 \bar{\varphi}_1$   |
| $z=h$ внѣ "         | $\bar{H}_n=0, \bar{H}_n=-e_0 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}; \bar{Z}_n=-e_0 \cos^2 \bar{\varphi},$      |

откуда видимъ, что силъ, вызывающихъ *поступательное* движеніе пластинки нѣтъ, ни со стороны самой пластинки, ни со стороны окружающей ея среды.

По предыдущему силы, дѣйствующія внутри пластинки, не могутъ дать и пары; такимъ образомъ у насъ остаются

|       |                                                                                                           |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $z=0$ | $\bar{H}_0=0, \bar{H}_0=e_0 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}; \bar{Z}_0=e_0 \cos^2 \bar{\varphi}$    |
| $z=h$ | $\bar{H}_h=0, \bar{H}_h=-e_0 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}; \bar{Z}_h=-e_0 \cos^2 \bar{\varphi}.$ |

17. Назовемъ  $x_0, y_0, z_0$  и  $x_h, y_h, z_h$  координаты со-  
ответственныхъ точекъ на плоскостяхъ  $z=0$  и  $z=h$  и  $dS_0$   
и  $dS_h$  элементы площади; тогда слагающія момента вращенія  
будутъ

$$M_x = \iint (\bar{y}_0 \bar{Z}_0 - \bar{z}_0 \bar{H}_0) dS_0 + \iint (\bar{y}_h \bar{Z}_h - \bar{z}_h \bar{H}_h) dS_h$$

$$M_y = \iint (\bar{x}_0 \bar{H}_0 - \bar{y}_0 \bar{Z}_0) dS_0 + \iint (\bar{x}_h \bar{H}_h - \bar{y}_h \bar{Z}_h) dS_h$$

$$M_z = \iint (\bar{z}_0 \bar{H}_0 - \bar{x}_0 \bar{Z}_0) dS_0 + \iint (\bar{z}_h \bar{H}_h - \bar{x}_h \bar{Z}_h) dS_h.$$



Но легко видѣть, что у насъ

$$\begin{aligned}\bar{x}_h &= \bar{x}_0 \\ \bar{y}_h &= \bar{y}_0 + h \operatorname{tg} \bar{\varphi}_1 & dS_0 &= dS_h \\ \bar{z}_h &= \bar{z}_0 + h\end{aligned}$$

и потому

$$\begin{aligned}M_x &= \iint \left[ \bar{y}_0 (\bar{Z}_0 + \bar{Z}_h) - \bar{z}_0 (\bar{H}_0 + \bar{H}_h) \right] dS_0 + h \iint (\bar{Z}_h \operatorname{tg} \bar{\varphi}_1 - \bar{H}_h) dS_0 \\ M_y &= \iint \left[ \bar{x}_0 (\bar{H}_0 + \bar{H}_h) - \bar{y}_0 (\bar{\Xi}_0 + \bar{\Xi}_h) \right] dS_0 - h \operatorname{tg} \bar{\varphi}_1 \bar{\Xi}_h \iint dS_0 \\ M_z &= \iint \left[ \bar{z}_0 (\bar{\Xi}_0 + \bar{\Xi}_h) - \bar{x}_0 (\bar{Z}_0 + \bar{Z}_h) \right] dS_0 + h \bar{\Xi}_h \iint dS_0,\end{aligned}$$

а это даетъ просто

$$M_x = h S_0 (\bar{Z}_h \operatorname{tg} \bar{\varphi}_1 - \bar{H}_h), \quad M_y = 0, \quad M_z = 0,$$

причемъ  $S_0$  есть освѣщаемая часть плоскости  $z=0$  и

$$M_x = e_0 S_0 h \cos \bar{\varphi} (\sin \bar{\varphi} - \cos \bar{\varphi} \operatorname{tg} \bar{\varphi}_1).$$

Въ нашемъ случаѣ паденія подъ угломъ поляризаціи имѣютъ мѣсто соотношенія

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = N; \quad \operatorname{tg} \bar{\varphi}_1 = \frac{1}{N},$$

и потому

$$M_x = e_0 S_0 h \frac{N^2 - 1}{N(N^2 + 1)}.$$

Для стекла въ воздухѣ будетъ  $M_x = 0.26 e_0 S_0 h$ , для алмаза  $M_x = 0.29 e_0 S_0 h$ .

Вычисленный нами моментъ вращенія представляетъ собою совсѣмъ новое явленіе въ интересующей насъ области.

§ 18. До сихъ поръ мы ограничивались разсмотрѣніемъ *плоскихъ* волнъ; остановимся немного и на волнахъ *сферическихъ*.

Возьмемъ начало координатъ въ свѣтящейся точкѣ, а отражающей плоскостью пусть будетъ плоскость  $z=h$ ; направленія осей координатъ оставимъ прежнія и допустимъ для общности, что падающая волна поляризована эллиптически. Тогда, полагая

$$r^2=x^2+y^2+z^2$$

$$\theta_n=2\pi\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)+\delta_n,$$

мы должны взять <sup>1)</sup> для падающей волны (съ обычнымъ приближеніемъ)

$$X_0=\frac{1}{r}\left(\mathfrak{B}\frac{\partial r}{\partial z}\cos\theta_2-\mathfrak{C}\frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta_2\right)$$

$$Y_0=\frac{1}{r}\left(\mathfrak{C}\frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta_2-\mathfrak{A}\frac{\partial r}{\partial z}\cos\theta_1\right)$$

$$Z_0=\frac{1}{r}\left(\mathfrak{A}\frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta_1-\mathfrak{B}\frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta_2\right),$$

откуда находимъ легко

$$L_0=\frac{1}{r}\left(\alpha_1\cos\theta_1+\alpha_2\cos\theta_2+\alpha_3\cos\theta_3\right)$$

$$M_0=\frac{1}{r}\left(\beta_1\cos\theta_1+\beta_2\cos\theta_2+\beta_3\cos\theta_3\right)$$

$$N_0=\frac{1}{r}\left(\gamma_1\cos\theta_1+\gamma_2\cos\theta_2+\gamma_3\cos\theta_3\right)$$

<sup>1)</sup> *Volkman*n, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes, p. 65, Leipzig, 1891.

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{A} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right]$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{B} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{C} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{A} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\beta_2 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{B} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\beta_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{C} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{A} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{B} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\gamma_3 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{C} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Для отраженной волны придется взять

$$r'^2 = x^2 + y^2 + (2h - z)^2,$$

и замѣнить  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  чрезъ  $\mathfrak{A}_r$ ,  $\mathfrak{B}_r$ ,  $\mathfrak{C}_r$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ , чрезъ  $\theta_1'$ ,  $\theta_2'$ ,  $\theta_3'$ ; при этомъ очевидно для  $z=h$  будетъ

$$\frac{\partial r'}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r'}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial r'}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\bar{r} = \bar{r}'.$$

Вычисленіе среднихъ величинъ  $X^2 = (X_0 + X_r)^2, \dots$ , хотя и длинное, не представитъ труда. Называя  $\bar{e}_0$  среднюю энергію

## Sur un problème de Géométrie

On trouve dans l'Intermédiaire (1900, 10, p. 232) le problème suivant proposé par M. Rosace: „Un arc se déplace sur une courbe plane de manière que sa corde  $PQ$  reste parallèle à la tangente en son milieu  $M$ . Peut on démontrer, par des considérations de Géométrie infinitésimale, que le rayon de courbure en  $M$  est moyen arithmétique entre les segments interceptés sur les normales en  $P$  et  $Q$ , à partir de ces points, par la normale à l'enveloppe de  $PQ$ ? Peut on déterminer simplement le centre de courbure de cette enveloppe, connaissant les centres de courbure de la courbe donnée et de sa développée, au point  $M$ , ainsi que le centre de courbure en  $P$  et  $Q$ ?"

---

Les lignes qui suivent se rapportent à la première partie du problème.

Soient  $PMQ$  et  $PMQ'$ —deux positions, infiniment voi-

sines, de l'arc,  $M$  et  $M'$  — leurs milieux respectifs.

On a évidemment:

$$PP' - MM' = MM - QQ',$$

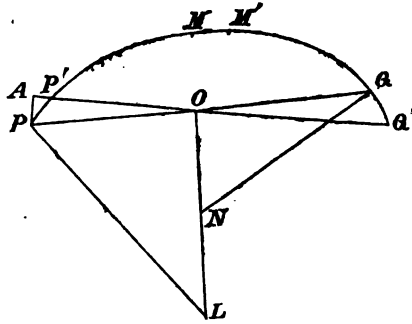
d'où

$$1) \quad PP' + QQ' = 2MM$$

Soient, de plus,  $PL$  et  $QN$

— les segments interceptés

sur les normales en  $P$  et  $Q$  par la perpendiculaire élevée à  $FQ$  en son point  $O$  de rencontre avec  $FQ'$ ,  $A$  — la projection de  $P$  sur  $P'Q'$ .



Rémarquons que  $OL$  est à la limite normale à l'enveloppe de  $PQ$ .

Cela posé, dans le triangle infinitésimal  $PAF'$ , rectangle en  $A$ , les cotés  $PP'$  et  $PA$  sont perpendiculaires aux droites  $PL$  et  $FO$  respectivement. Ce triangle est donc semblable au triangle  $POL$ , d'où

$$\frac{PP'}{PL} = \frac{AP}{AO} = \alpha,$$

en désignant par  $\alpha$  l'angle infinitésimal  $POP'$ . Nous trouvons de même:

$$\frac{QQ'}{QN} = \alpha.$$

Les cordes  $PQ$  et  $P'Q'$  étant parallèles aux tangentes en  $M$  et  $M'$  respectivement, l'angle  $\alpha$  est égal à l'angle de contingence en  $M$ . Donc

$$MM' = R\alpha,$$

si  $R$  est le rayon de courbure en  $M$ . Nous aurons ainsi:

$$\frac{PF'}{PL} = \frac{QQ'}{QN} = \frac{MM'}{R}.$$

En comparant avec 1), on arrive à la relation demandée:

$$PL + QN = 2R.$$

D. Seiliger.

### III.

## ЛѢТОПИСЬ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

### Протоколъ 97 засѣданія.

16 сентября 1900.

(Присутствовало 10 членовъ и 6 постороннихъ лицъ).

1) А. В. Васильевъ сообщилъ о международномъ математическомъ конгрессѣ въ Парижѣ въ 1900 г

2) Д. Н. Зейлигеръ сдѣлалъ сообщеніе: линейчатая система колець.

3) Предложены къ избранію и избраны въ члены Физико-математическаго Общества.

279) *Аристовъ Иванъ Ивановичъ*, окончившій курсъ па физико математическомъ факультетѣ (по пред. А. В. Васильева и Д. А. Гольдгаммера).

280) *Цель Александръ* проф. Уннверситета въ Дакотѣ, University of South Dakota (по предлж. А. В. Васильева и Д. М. Синцова).

### Протоколъ 98 засѣданія.

7 октября 1900 г.

(Присутствовало 12 членовъ и около 15 постороннихъ лицъ).

Это засѣданіе было посвящено памяти трехъ умершихъ членовъ Общества, о. І. М. Первушина (реф. А. В. Васильевъ), А. К. Жбиковскаго (реф. Н. В. Нечаевъ) и Г. Н. Шебуева (реф. М. С. Сегель).

## Протоколъ 99 засѣданія.

22 октября 1900 г.

(Присутствовало 13 членовъ и 8 постороннихъ лицъ).

1) Предсѣдатель А. В. Васильевъ объявилъ присужденіе преміи имени Н. И. Лобачевскаго профессору Мюнстерской Академіи В. Киллингу (W. Killing), присужденіе почетнаго отзыва на основаніи § 7 положенія о преміи профессору Кембриджскаго Университета А. Уайтхеду (A. N. Whitehead), присужденіе почетнаго отзыва на основаніи § 14 профессору высшей специальной технической школы въ Вѣнѣ В. Биндеру (W. Binder); присужденіе золотыхъ медалей референтамъ: профессорамъ Лейпцигскаго Университета Энгелю и Московскаго Университета К. Андрееву.

2) Н. И. Порфирьевъ прочиталъ отзывы, послужившіе основаніемъ состоявшихся присужденій. Рѣшено увѣдомить телеграммами всѣхъ лицъ удостоенныхъ наградами.

## Протоколъ 100 засѣданія.

18 ноября 1900 г.

(Присутствовало 12 членовъ и около 15 постороннихъ лицъ).

1) По предложенію предсѣдателя былъ избранъ въ почетные члены общества профессоръ Кембриджскаго Университета Р. Болль.

2) Д. Н. Зейлигеръ сдѣлалъ два сообщенія: 1) Равновѣсіе прямолинейной системы. 2) Новыя формулы геометріи и кинематики.

3) И. А. Износковъ сдѣлалъ сообщеніе „о магическихъ квадратахъ“.

4) Д. А. Гольдгаммеръ сдѣлалъ сообщеніе: „о давленіи свѣтовыхъ лучей“.

---



## Задача изопериметровъ

А. Гурвица <sup>1)</sup>).

**Классическая задача.** *Определить ту изъ замкнутыхъ кривыхъ даннаго периметра, которая заключаетъ наибольшую площадь,* можетъ быть очень просто рѣшена съ помощью строкъ Фурье. Показать это—цѣль нѣсколькихъ слѣдующихъ строкъ.

Пусть  $C$  есть замкнутая кривая,  $s$  длина дуги отсчитываемой отъ произвольной выбранной точки кривой. Выберемъ единицу длины такъ, чтобы полная длина  $C$  равнялась  $2\pi$  т. е. длинѣ окружности круга, котораго радиусъ равенъ 1.

Координаты  $x, y$  перемѣнной точки на  $C$  будутъ очевидно непрерывныя функціи дуги  $s$ , имѣющія періодъ  $2\pi$ ; предположимъ, что эти функціи равно какъ и ихъ производныя по  $s$  будутъ разложимы въ тригонометрическія строки и положимъ:

$$(1) \quad \begin{cases} x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ns + a'_n \sin ns) \\ y = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos ns + b'_n \sin ns) \end{cases}$$

Такъ-какъ площадь  $F$  кривой  $C$  выражается интеграломъ

$$F = \int x dy = \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{ds} ds, \text{ то, на основаніи разложеній (1),}$$

$$(2) \quad F = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n b'_n - a'_n b_n).$$

---

<sup>1)</sup> Comptes Rendus. Т. 132. Переводъ А. В. Васильева.

Подобнымъ-же образомъ, интегрирование тождества

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \text{ между предѣлами } 0 \text{ и } 2\pi \text{ даетъ}$$

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds + \int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds \text{ т. е.}$$

$$(3) \quad 2\pi = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + a_n'^2 + b_n^2 + b_n'^2).$$

Изъ уравненій (2) и (3) имѣемъ

$$2(\pi - F) = \pi \sum \{ (n^2 - n) (a_n^2 + a_n'^2 + b_n^2 + b_n'^2) + n[(a_n - b_n')^2 + (a_n' + b_n)^2] \}.$$

Такъ-какъ всѣ члены этой суммы существенно положительны, то площадь  $F$  кривой  $C$  не можетъ превзойти площадь  $\pi$  круга радіуса 1.

Сверхъ того равенство  $F = \pi$  очевидно имѣетъ слѣдствіями  $a_1 = b_1', a_1' = -b_1$  и  $a_n = a_n' = b_n = b_n' = 0$  для  $n > 1$ . Поэтому если  $F = \pi$ , то уравненія (1) кривой  $C$  принимаютъ форму  $x = a_0 + a_1 \cos s + a_1' \sin s$ ,  $y = b_0 - a_1' \cos s + a_1 \sin s$ , т. ч. кривая  $C$  есть кругъ.

Итакъ изъ всѣхъ кривыхъ одного и того-же периметра кругъ и только одинъ кругъ содержитъ наибольшую площадь.

## Новая форма уравнений Механики.

Пуанкаре<sup>1)</sup>.

Занимаясь вращательным движением твердаго полаго тѣла, котораго пустота наполнена жидкостью, я привелъ общія уравненія Механики къ слѣдующей формѣ, которую я считаю новою и интересною.

Предположимъ, что число степеней свободы равно  $n$  и обозначимъ буквами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  переменныя, опредѣляющія состояніе системы. Пусть  $T$  и  $U$  обозначаютъ энергіи кинетическую и потенціальную. Разсмотримъ непрерывную транзитивную группу. Пусть  $X_i(f)$  есть какое-либо бесконечно-малое преобразование этой группы, такъ-что

$$X_i(f) = X_i^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_i^n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Такъ-какъ эти преобразования составляютъ группу, то

$$X_i X_k - X_k X_i = \sum C_{iks} X_s.$$

Мы можемъ положить (вслѣдствіе транзитивности группы)

$$x'_\mu = \frac{dx_\mu}{dt} = \gamma_1 X_1^\mu + \gamma_2 X_2^\mu + \dots + \gamma_r X_r^\mu$$

такъ-что отъ состоянія системы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  къ состоянію

---

<sup>1)</sup> Comptes Rendus. T. 132. № 7 (18 февр. 1901). Перев. А. В. Васильева.

безконечно-близкому  $(x_1 + x_1' dt, \dots, x_n + x_n' dt)$  можно перейти  
безконечно-малымъ преобразованиемъ группы

$$\Sigma r_i dt X_i(f).$$

$T$  можетъ быть выражено въ функціи  $\eta$  и  $x$  вмѣсто обычнаго  
выраженія въ функціи  $x$  и  $x'$ . Если мы дадимъ  $\eta$  и  $x$  воз-  
можныя приращенія  $\delta\eta$  и  $\delta x$ , то получимъ для  $T$  и  $U$  при-  
ращенія

$$\delta T = \Sigma \frac{dT}{d\eta} \delta\eta + \Sigma \frac{dT}{dx} \delta x; \delta U = \Sigma \frac{\partial U}{\partial x} \delta x.$$

Такъ - какъ группа транзитивна, то можно положить

$$\delta x_\mu = \omega_1 X_{1,\mu} + \omega_2 X_{2,\mu} + \dots + \omega_r X_{r,\mu}$$

такъ-что отъ состоянія  $x_i$  въ состоянію безконечно-близкому  
 $x_i + \delta x_i$  можно перейти посредствомъ безконечно - малаго  
преобразования группы

$$\Sigma \omega_i X_i(f).$$

Пусть теперь

$$\Sigma \left( \frac{dT}{dx} - \frac{dU}{dx} \right) \delta x = \Sigma \Omega_i \omega_i.$$

Для интеграла Гамильтона

$$J = \int (T - U) dt, \text{ мы будемъ имѣть}$$

$$\delta J = \int \left( \Sigma \frac{dT}{dr_i} \delta r_i + \Sigma \Omega_i \omega_i \right) dt.$$

Легко видѣть, что

$$\delta r_i = \frac{d\omega_i}{dt} + \Sigma c_{ski} \eta_k \omega_s.$$

Принципъ наименьшаго дѣйствія даетъ тогда

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \cdot \frac{dT}{dr_s} = \Sigma c_{ski} \frac{dT}{dr_i} \eta_k + \Omega_s.$$

Уравненія (1) заключаютъ въ себѣ, какъ частные случаи:  
1° уравненія Лагранжа, если группа приводится къ группѣ перестановляемыхъ между собою преобразованій, увеличивающихъ ту или другую изъ переменныхъ  $x$  на бесконечно-малую постоянную.

2° уравненія Эйлера для вращенія твердыхъ тѣлъ, причемъ  $\gamma_i$  замѣняются составляющими вращенія  $p, q, r$ , и  $\Omega$ , — параметрами, происходящими отъ вѣшнихъ силъ.

Уравненія въ особенности интересны въ случаѣ, если при  $U=0$   $T$  зависитъ только отъ  $\gamma$ .

---

Вышло изъ печати сочиненіе

А. П. Охитовича:

„НОВЫЙ (НЕОПРЕДѢЛЕННЫЙ) МЕТОДЪ  
рѣшенія алгебраическихъ уравненій“.

Часть I.

Общее рѣшеніе уравненій первой степени:  
неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ.

Гор. Казань 1900 г. 333 стр. Ц. 2 р. 50 к.

Съ пересылкой **2** руб. **75** коп.

Продается у автора (г. Саранулъ, Вятск. губ.), а также въ книжныхъ магазинахъ: 1) Товарищества „Общественная Польза“ (СПБ.), 2) Н. П. Карбасникова (СПБ., Москва, Варшава и Вильно), 3) „Новаго Времени“ (СПБ., Москва, Харьковъ и Одесса), 4) А. А. Дубровина (Казань) и другихъ.

ВЫПИСЫВАЮЩЕ ОТЪ АВТОРА

**за пересылку не платять.**

---

# BIBLIOGRAPHIA MATHEMATICA

## ROSSICA.

Списокъ книгъ и статей по чистой математикѣ, на-  
печатанныхъ въ Россіи.

въ теченіе 1899 -года.

---

*Изданіе Казанскаго Физико - Математическаго Общества.*



**КАЗАНЬ.**

Типо-литографія Императорскаго Университета.

1901.

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества  
при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ.*



Настоящій выпускъ составленъ подобно предыдущимъ,—выборкою заглавій изъ русскихъ повременныхъ изданій, въ которыхъ можно ожидать математическія статьи, и съ помощью „Книжнаго Вѣстника“, дающаго матеріалъ на основаніи свѣдѣній „Правительственнаго Вѣстника“ печатающаго цензурные списки книгъ. Надо однако сказать, что списки эти запаздываютъ печатаніемъ, поэтому и въ настоящемъ выпускѣ возможны пропуски. Составитель обращается поэтому съ покорнѣйшею просьбою къ авторамъ,—преимущественно работъ по высшей математикѣ,—присылать ему отдѣльные оттиски своихъ работъ. Настоящій списокъ представляетъ предварительную работу для рефератовъ въ Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik и желательно, чтобы онъ былъ возможно полонъ. Пропуски предыдущихъ выпусковъ вносятся въ текстъ съ указаніемъ года. Въ этомъ выпускѣ присоединена и механика, но развитъ ее полнѣе, присоединивъ и краткій обзоръ содержанія, остается еще *pium desiderium*.

Екатеринославъ  
13. XII. 900.

*Д. Синцовъ.*

# 1. Исторія математики, біографія, некрологи и т. п.

(Бобынинъ, В. В.) Новый историко-математическій журналъ Физ. Мат. Науки (2) I с. 55—60. (Bolletino di Bibliografia istoria delle scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria).

Его же. Международный органъ преподаванія математическихъ наукъ. (L' Enseignement mathématique. Laisant et Fehr). Физ.-Мат. Науки (2) Т. I н° 1 с. 26—30.

Его же. Баронъ Плана. Очеркъ его профессорской и учено-литературной дѣятельности. Физико-Матем. Науки (2) I н° 1. с. 14—25 н° 3 с. 67—70.

**Его же.** Новая математическая энциклопедія. Физ.-Мат. Науки (2) т. I п<sup>о</sup> 3 с. 84—92.

**Его же.** Юбилей г. д-ра Морица Кантора. Физ.-Мат. Науки (2) т. I, с. 76—83.

**Его же.** Первый русский математический журналъ. Физ.-Мат. Науки (2) I п<sup>о</sup> 2 с. 35—54, п<sup>о</sup> 3 с. 71—75.

**Его же.** Библиографический указатель 1899 годъ. Физ.-Мат. Науки (2) I п<sup>о</sup> 1 с. 31—32, п<sup>о</sup> 2 с. 61—64, п<sup>о</sup> 3 с. 93—96.

**В. Г. Перикль** Діаманди В. Оп.-Ф. № 274 с. 260—263.

**Дюбуа—Реймонъ Е.** Германъ фонъ Гельмгольцъ. Пер. съ нѣм. В. Батя. Подъ ред. В. П. Вейнберга. Изд. ред. журн. „Образование“. Спб.

**Лобачевскій Н. И.** Біографическій очеркъ Спб. 56 стр. 8100 экз. Ц. 15 к. (Издание для народа).

**Сохоцкий, Ю. В., Селивановъ, Д. Ф. и Бобылевъ, Д. Н.** Рѣчи въ засѣданіи 14. I. 95. посвященномъ памяти П. Л. Чебышева. Прот. Спб. Мат. О. с. 91—102.

**Чебышевъ, П. Л.** Собрание сочиненій, изд. Имп. Академіи Наукъ подъ ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сони́на. Т. I, гв. 8°. VI+714. (съ портр.). Спб.

**Tchebychef, P. L.** Oeuvres Publiés par l'Académie Impériale des Sciences, Sous la Redaction des mm. N. I. Sonin A A. A. Markoff. T. I. VI+714. gr. in.—8°.

## 2. Философія математики, математическая логика; педагогика математики.

**Буницкій, Е.** Нѣкоторыя приложенія математической логики къ теоріи общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратваго В. Оп. Ф. № 274 с. 249—253.

**Гюйо, М.** Происхожденіе идеи времени. Съ предисловіемъ А. Фулье с. 1—80. (Собрание сочиненій Т. I. Изд. Товар. „Знаніе“). Спб. 8°.

**Контъ, О.** Курсъ положительной философіи. Полный пер. подъ ред. и съ прим. пр. С. Е. Савича, О. Д. Хвольсона, Д. И. Менделѣева и др. Т. I. отд. 1. Спб. 8°. 141 стр. 3450 экз. Ц. за 6 том. по подп. 12 р.

**Poretzky P. S.** Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques. Изв. Каз. Физ.-Мат. О. (2) VIII, с. 183—216.

Сборникъ статей въ помощь самообразованію по математикѣ, физикѣ, химіи и астрономіи. Вып. I, изд. 2. М. 8°. 247 с: 3500 экз. Ц. 1 р. 20 к.

**Шидловскій, В.** Къ дню открытія Парижской выставки. Объ образовательномъ значеніи ученія о логарифмахъ и роли математики, какъ основѣ промышленнаго, техническаго и культурнаго прогресса человѣчества. Ц. 35 к.

### 3. Ариметика.

#### а). Методика.

**Беллюстинъ, В.** Методика ариметики. Курсъ младш. отдѣленія начальн. школъ. М. 8°. 69 с. 2400 экз. Ц. 20 к.

**Вишневскій, Г. М.** Записки по методикѣ элементарной ариметики. Руководство для учит. семинарій, институтовъ, VIII класса жен. гимназ., учителей и учительницъ нач. училищъ. Изд. 6. Ц. 50 к.

**Гедз. О. В.** Методика и дидактика ариметики. Книга для учащихся въ средней и низшей школахъ Ч. I. Введеніе и н основнй курсъ ариметики. Спб. 8°. 215 с. 1200 экз. Ц. 1 р. 25 к.

**Гольденбергъ, А. И.** Методика начальной ариметики. Изд. 13-е. Д. Полубояринова. Спб. 8°. 192 с. 10000 экз. Ц. 75 к.

**Евтушевскій.** Методика ариметики. Пособіе для учит. институтовъ, уч. семинарій, преподавателей младш. клас. ср.-уч. зав. и родителей. Изд. 14, Д. Полубояринова. Спб. 8°. 352 с. 3000 экз. Ц. 1 р. 50 к.

**Меморскій.** Ариметика въ вопросахъ и отвѣтахъ, для легчайшаго самообученія и обученія другихъ. Изд. вновь испр. и доп. М. 12°. 107 с. 7200 экз.

**Рабцевичъ, В. В.** Методика начальной ариметики. Черниговъ. Ц. 90 к.

**Шохоръ-Троцкій, С. И.** Чему и какъ учить на урокахъ ариметики? Вып. I. Изд. 2-е пересм. Спб. 12°. 62 стр. 2000 экз. Ц. 20 к.

б) Руководства.

**Бахчисарайцевъ, Г.** Коммерческая ариѳметика и вычисленіе торговыхъ операцій въ связи съ необходимыми свѣдѣніями изъ теоретич. ариѳметики. Элем. курсъ. Спб. 8°. 64 стр. 1200 экз. Ц. 70 к.

**Быновъ, И. Я.** Систематическій курсъ ариѳметики. Спб. тип. Скороходова. 8°. 294 с. 1200 экз. Ц. 1 р. 10 к.

**Васильевъ, В. М.** Ариѳметика дробныхъ чиселъ. Изд. 3. М. 99 г. тип. Баландина 8°. 75 с. 3600 экз. Ц. 25 к.

**Верещагинъ, И.** Сборникъ ариѳметическихъ задачъ для средн. уч. зав. муж. и жен. Изд. 12 Спб. 8°, 373 с. 30000 экз. Ц. 80 к.

**Глаголевъ, А. Н.** Ариѳметика съ коммерческими вычислениями и сборникъ задачъ (Курсъ вечерн. торговыхъ классовъ) Изд. Моск. Общ. распространенія коммерческаго образованія М. 8° 226 с. 1400 экз. Ц. 90 к.

**Киселевъ, А.** Систематическій курсъ ариѳметики. Изд. 11-е. М. 8°, 242 с. 40000 экз. Ц. 75 к.

**Малининъ, А. и Буренинъ, Н.** Ариѳметика. Изд. 20. М. 8°. 207 с. 60000 экз. Ц. 75 к.

**Малининъ, А.** Ариѳметика. Курсъ средн. уч. зав. Изд. 3 испр. и доп. М. 8°. 255 с. 2400 экз. Ц. 90 к.

**Малышевъ, И.** Самоучитель ариѳметики на счетахъ Изд. 3. М. 8°. 32 с. 500 экз.

**Мансфельдъ, А.** Курсъ коммерческой ариѳметики и торговыхъ операцій. М. 8°. 404 с. 1200 экз. Ц. 2 р. 50 к.

**Михельсонъ, С.** Первые уроки ариѳметики. Задачи, примѣры и вопросы. Практич. руководство для семьи и школы. Изд. 2-е испр. и доп. Спб. 8°. 98 с. 2000 экз. Ц. 40 к.

**Никульцовъ, П.** Ариѳметика. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Изд. 5-е. Думнова. М. (1900) 8°. 277 с. 2400 экз. Ц. 70 к.

**Плетневъ, И.** Какъ научиться рѣшать задачи на цѣлыя числа. Пособіе для учащихся и поступающихъ въ спеціальныя высшія и среднія учеб. заведенія. Спб. 8°. 98 с. 1250 экз. Ц. 65 к.

**Серре и Номберусъ.** Курсъ ариѳметики Пер. Е. Гутора. Изд. 3-е Думнова. М. 8°. 200 стр. 2400 экз. Ц. 85 к.

**Тихомировъ, Е. М.** Учебникъ ариметики. Курсъ средн. учебн. зав. Изд. 3. М. 252 с. 2400 экз. Ц. 75 к.

**Цигельманъ, Н. Л.** Основныя начала ариметики. Систем. конспектъ для повторенія ариметики въ низш. и средн. учебн. заведеніяхъ. Изд. 9 испр. Одесса. 8°. 124 с. 3000 экз. Ц. 30 к.

с) Задачники.

**Арбузовъ В., Мининъ А., Мининъ В. и Назаровъ Д.** Систематическій сборникъ ариметическихъ задачъ для гимназій и прогимназій, мужск. и женск., реальн., уѣздн. и гор. училищъ, учит. инстит. и семинарій. Изд. 8 с. Думнова М, 8°. 244 с. 21000 экз. Ц. 60 к.

**Беллюстинъ, В.** Ариметическій задачникъ для перваго года обученія М. 8°, 56 с. 2400 экз. Ц. 10 к.

**Бычковъ Ѳ.** Сборникъ примѣровъ и задачъ, относящихся къ курсу элемент. алгебры. Изд. 15. испр. Спб. 8° 580 с. 15000 экз. Ц. 1 р. 35 к.

**Бѣлявскій С. М.** Сборникъ задачъ по алгебрѣ, геометріи, тригонометріи и физикѣ. предлаг. на конкурс. исп. въ инст. Технолог., Горномъ., Инж. П. С. и др. Изд. 2 Спб. 8° 61 с. и I т. черт. 2000 экз.

**Виноградовъ, М. С.** Ариметическій задачникъ для начальныхъ училищъ. Въ 3-хъ вып. Изд. Думнова. М. 8°. Вып. II 76 с. 2400 экз. Ц. 20 к.

Тоже Вып. III Изд. 3-е. испр. и доп. 88 с. 2400 экз. Ц. 20 к.

**Вишневскій, Г. М.** Ариметическій задачникъ для нач. училищъ и приготов. классовъ гим. и реальн. училищъ. Изд. Н-с. бр. Башмаковыхъ Казань. 8°. 144 с. 20000 экз.

**Вороновъ, А.** Собраніе ариѳ. задачъ, въ 2-хъ част. ч. I (цѣлыя числа) Изд. 11. Д. Полубояринова. Спб. 8°. 84 с. 10000 экз. Ц. 30 к.

**Гольденбергъ, А. М.** Сборникъ задачъ и примѣровъ для обученія начальной ариметикѣ. Вып. I. Изд. 33 и 34 Спб. 8° 64 с. 200000 экз. Ц. 15 к.

Тоже. Вып. II. Изд. 29-е Полубояринова. Спб. 8°. 64 с. 50000 экз. Ц. 15 к.

**Его же.** Собрание арифметическихъ упражненій для гимн. и реальн. училищъ. Курсъ пригот. класса. Изд. 2-е. испр. Спб. тип. Бенъе, 8°. 80 с. 6000 экз. Ц. 25 к.

**Его же.** Упражнения для учениковъ. Педаг. Сб. № 8 с. 137—139.

**Державинъ, М.** Задачникъ для обученія первоначальному счету М. 8°. 48 с. 2400 экз. Ц. 7 к.

**Евтушевскій, В. А.** Сборникъ арифметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготов. и систем. курса. Ч. I—цѣлыя числа. Изд. 65, 66 и 67. Спб. 8°. 165 стр. по 50200 экз. Ц. 35 к.

**Егоровъ, Ѳ. И.** Собрание арифметическихъ задачъ вычисленій и др. упражненій въ предѣлѣ первой сотни чиселъ, для начальн. преподаванія. М. 8°. 95 стр. 12000 экз. Ц. 25 к.

**Его же.** Собрание арифметическихъ задачъ и вычисленій на дроби простыя и десятичныя и правила: тройное, пропорц. дѣленія, процентовъ и др. Изд. 3-е. Думнова. М. 8°. 138 с. 2400 экз. Ц. 40 к.

**Житковъ, С. В.** Сборникъ самостоятельныхъ упражненій по арифметикѣ. Задачникъ для учениковъ начальн. школъ. Изд. 9-е. Спб. 99 тип. тов. „Обществ. польза“ 8°. 133 с. 15000 экз. Ц. 25 к.

**Номаровъ, А. Ф.** Методическое рѣшеніе типическихъ, арифметическихъ задачъ въ начальныхъ училищахъ. Изд. 6-е. Тихомирова М. 8°. 110 с. 4800 экз. Ц. 40 к.

**Его же.** Арифметическій задачникъ для начальн. гор. и сельск. учил. Вып. I, Изданіе 8. М. 8.56 с. 20000 экз. Ц. 15 к.—Тоже. Вып. II. Изд. 8. М. 8°. 121 с. 20000 экз. Ц. 20 к.

**Лубенецъ, Т.** Сборникъ арифметическихъ задачъ, заключающихъ въ себѣ данныя преимущественно изъ сельскаго быта. Т. I. Изд. 15-е Ф. Павленкова. Спб. 8°. 48 с. 10100 экз. Ц. 12 к.

**Тоже.** Годъ II. Изд. 14-е. Ф. Павленкова Спб. 8°. 68 с. 10100 экз. Ц. 15 коп.

**Малининъ, А. и Буренинъ, Н.** Собрание арифметическихъ задачъ. Для гимназій и прогимназій, мужск. и женск., реальн., уѣздн. и гор. училищъ, учит. инстит. и семинарій. Изд. 22., вн. маг. Думнова. М. 8°. 272 стр. 84000 экз. Ц. 50 к.

**Некрасовъ, Н. Я.** Сборникъ ариѳметическихъ правилъ, примѣровъ и задачъ. Вып. II. Изд. 6 е Спб. 1900 (XII.) 8°. 64 с. 25000 экз. Ц. 15 к.

Отвѣты на вопросы по теоретической ариѳметикѣ, помѣщенные въ программѣ вступительнаго конкурснаго экзамена въ Инст. Инж. П. С. Изд. Левенгстерна. М. 8°. 46 с. 2400 экз. Ц. 50 к.

**Павловъ, А.** Сборникъ задачъ и примѣровъ для начального обученія ариѳметикѣ примѣнит. къ новой программѣ начальн. и младш. отдѣленій городск. училищъ. Спб. Годъ 1-й. 8°. 64 с. 3000 экз. Ц. 15 к.—Тоже Годъ 2-й, 68 с. 3000 экз. Ц. 15 к.—Тоже. Годъ 3-й, 80 стр. 3000 экз. Ц. 20 к.

**Рачинскій, С.** 1001 задача для умственнаго счета. Пособіе для учителей сельск. школъ. Изд. 3. Спб. 8° 88 стр. 200000 экз. Ц. 15 к.

Сборникъ ариѳметическихъ задачъ для воскресныхъ школъ, вечернихъ и повторит. классовъ. Изд. 2, доп., сост. подъ ред. А. Гатлиса. М. 8° 95 с. 6000 экз. Ц. 20 к.

Сборникъ ариѳметич. задачъ и примѣровъ съ распределеніемъ задачъ по типамъ для начальн. нар. училищъ. Вып. II. Задачи и примѣры на цѣлыя и именованныя числа до 1000. Сост. кружкомъ учителей Московск. город. школъ. Изд. Тихомирова М. 8° 144 с. 3600 экз. Ц. 20 к. Тоже. Изд. 2. М. 8°. 131 с. 5000 экз. Ц. 20 к.

**Семена.** Диктовки для чтенія и изложенія, ариѳметическія задачи. Матеріалъ для устныхъ и письменныхъ испытаній въ начальныхъ училищахъ. Изд. 4. Спб. 8°. 87 с. 3080 экз. Ц. 40 к.

**Тенишевъ, Б. А.,** кн. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ для церковно-приходскихъ школъ. 1-й и 2-й годъ обученія. Изд. 6-е. Спб. 8°. 147 с. 100000 экз. Ц. 20 к.

**Цвѣтновъ, П.** Рѣшеніе ариѳметическихъ задачъ, составляющихъ курсъ начальной ариѳметики и новая систематизація ихъ. Изд. Полубояринова. Спб. 8°. 76 с. 1045 экз. Ц. 35 к.

**Его же.** Методическій сборникъ ариѳм. примѣровъ и задачъ расположенныхъ по новой системѣ. Первый годъ обученія Ц. 10 к. Второй годъ обученія. Ц. 20 к. Третій годъ обученія Ц. 20 к.

**Шапошниковъ, Н. А. и Вальцовъ, Н. Н.** Сборникъ ариѳметическихъ задачъ съ излож. всѣхъ главн. опредѣленій и пра-

вилъ и съ объясненіемъ образцовыхъ способовъ рѣшенія задачъ. Ч. I. Цѣлыя отвѣченныя и именов. числа 8°. 152 с. 4800 экз. Ц. 40 к.

Ихъ же. Сборникъ ариметическихъ задачъ съ изложеніемъ всѣхъ главныхъ опредѣленій и правилъ, и съ объясненіемъ образцовыхъ способовъ рѣшенія задачъ. Ч. 2-я Теорія дробей и общія правила. Изд. В. Думнова М. 8°. 208 с. 3600 экз. Ц. 60 к.

Шохоръ-Троцкий С. Ариметическій задачникъ для учителей школъ грамоты. Спб. тип. Фролова 12°. 122 с. 2000 экз. Ц. 30 к.

Саворскій, А. Рѣшенія къ собранію арием. задачъ, составл. А. С. Малининымъ и К. Буренинымъ. М. 8°. 84 с. 1200 экз.

#### д) Отдѣльные вопросы.

Н. С. Къ методикѣ дѣленія простыхъ дробей. Педаг. Сб. № 2. ч. неоф. с. 178—190.

Рождественскій Я. Въ защиту способа пропорцій при рѣшеніи задачъ на такъ наз. тройное правило. Педаг. Сб. 1899 № 4 ч. неоф. с. 358—391.

#### 4. Теорія чиселъ.

Аладовъ, И. С. О распредѣленіи квадратичныхъ вычетовъ и невычетовъ простого числа  $p$  въ ряду  $1, 2, \dots, p-1$ . Прот. Спб. Мат. О. с. 65—72.

Его же. О числѣ бинарныхъ квадратичныхъ формъ, опредѣлитель которыхъ равенъ отрицательному числу. Прот. Спб. Мат. О. с. 103—105.

Его же. О наивысшемъ предѣлѣ числа рѣшеній сравненія  $X^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$  меньшихъ  $p$ , при  $p$  простомъ. Прот. Спб. Мат. О. с. 40—44.

Алексѣевскій, В. П. О законѣ взаимности простыхъ чиселъ. Сообщ. Харьк. Мат. О. (2) VI с. 200—202.

Бугаевъ, Н. В. Различные способы изслѣдованія опредѣленныхъ числовыхъ интеграловъ по дѣлителямъ. Мат. Сб. XX с. 549—595.

Вороной, Г. О. Объ опредѣленіи суммы квадратичныхъ вычетовъ простого числа  $p$  вида  $4m+3$  при помощи чиселъ Бернулли. Спб. Протоколы с. 5.

Ивановъ, М. И. Нѣкоторыя предложенія о простыхъ числахъ. Прот. Спб. Мат. О. с. 53—54, 55—58.



**Леженъ-Диришле, П. Г.** Теорія чиселъ, вып. I. (О дѣлимости чиселъ, о сравненіяхъ, о квадрат. вычетахъ). Пер. Я. М. Назаревскаго. Со сборникомъ упражненій и задачъ. Спб. тип. Акад. Наукъ 8°. 189 с. 1012 экз.

**Селивановъ, Д. В.** О разложеніи чиселъ на множители. Прот. Спб. Мат. О. с. 12.

**Его же.** О числовой функціи  $\varphi(n)$  выражающихъ число чиселъ простыхъ съ  $n$  и не превосходящихъ его. Прот. Спб. Мат. О. с. 120—122.

**Станевичъ, В. И.** По поводу замѣтки Poincaré „О распределеніи простыхъ чиселъ вида  $4n+1$ “ (С. R. 14. X. 91. Прот. Спб. Мат. О. с. 20.

**Чистяновъ, I. М.** О второй производной одной логарифмической числовой функціи. Моск. Мат. Сб. XX. с. 595 – 607.

---

**Бертранъ Ж.** Теоретическая арифметика. Сост. преимущ. по Бертрону Н. Билибинъ. Изд. 4-е. И. Билибина. Спб. тип. Стасюлевича. 8°. 294 с. 3000 экз. Ц. 1 р. 50 к.

**Волновъ, М.** Эволюція понятія о числѣ. Спб. тип. Ак. Н. 8°. 127 с., 410 экз. Ц. 80 к. Рецензія В. Стрелова: Педагогич. Сб. № 9 с. 184—209.

## 5. Алгебра элементарная.

**Агаповъ, Д. В.** Искусственные способы рѣшенія уравненій 2 степени со многими неизвѣстными. Для старш. клас. средн. учебн. заведеній. Изд. 2-е, доп. Оренб. тип. Бреслина. 8°. 64 с. 1000 экз. Ц. 60 к.

**Бертранъ. Ж.** Алгебра. Ч. I. Просмотрѣнная Ж. Бертрамомъ и Г. Гане. Пер. съ фр. съ нѣкот. дополненіями М. В. Пирожникова. Спб. 8°. 581 с. 3000 экз. Ц. 3 р.

**Билибинъ. Н.** Алгебра для гимназій и реальн. училищъ. Сост. по Бертрону и др. Изд. 3-е. И. Билибина. Спб. 8°. 581 с. 3000 экз. Ц. 2 р. 50 к.

**Верещагинъ, И.** Сборникъ алгебраическихъ задачъ для учениковъ старш. классовъ средн. учеб. заведеній. Изд. 4-е. Спб. 1900 8°. 180 с. 2400 экз. Ц. 40 к.

**Вроблевскій, В.** Рѣшенія къ сборнику задачъ относящихся къ курсу элементарной алгебры Бычкова. Вып. 3. Спб. 8°.

с. 399—640. 3020 экз. Ц. 1 р. 50 к.—Тоже Вып. 4. Квадр. и кубич. уравненія. Спб. 900 8°. 286 с. 3020 экз. Ц. 1 р. 75 к.

**Ниселовъ, А.** Элементарная алгебра. Изд. 10. М. 8°. 320 с. 14300 экз. Ц. 1 р. 10 к.

**Малининъ, А. и Буренинъ, Н.** Руководство алгебры и собраніе алгебраическихъ задачъ для гимн., реальн. учил. и учит. семин. Изд. 10. М. 8°. 416 с. 14800 экз. Ц. 1 р.

**Марновъ, А. А.** О доказательствѣ Сильвестра трансцендентности числа  $\pi$ . Протоколы Спб. Мат. О. с.—9.

**Никульцевъ, П.** Алгебра и собраніе алгебраическихъ задачъ. Курсъ средн. уч. зав. Ч. 1-я. Теоретич. отдѣлъ. Изд. 4. М. 8°. 337 с. 2400 экз. Ц. 1 р. 25 к.

**Новиковъ, П. М.** О приведеніи извлеченія корня какой либо степени изъ числа къ извлеченію корней другой какой угодно степени. (Педаг. Спб.) Обзоръ дѣят. Педаг. Музея за 97—98 г. с. 245—246.

**Пѣвницкій, С. Н.** О неперовыхъ логариомахъ. (Обзоръ дѣят. Педаг. Музея за 97—98 у. г. с. 233—236, 285). Педаг. Сб., №№ 5, 8.

**Свѣшниковъ, П.** Извлеченіе квадратныхъ корней изъ чиселъ при помощи послѣдовательныхъ вычитаній. Пед. Сб. № 7 с. 79—81.

**Селивановъ, Д. Ѳ.** О приближенномъ вычисленіи. (Педаг. Сб. 5). Обзоръ дѣят. Педаг. Музея за 97—98 г. С. 251—254.

**Соронинъ, П.** О разложеніи одного трехчлена на квадратныя множители. Педаг. Сб. № 8 с. 139—142.

**Тихошировъ, Е. И.** Примѣры и задачи по начальной алгебрѣ. Систем. пособіе для средн. уч. зав. Изд. 2-е, испр. и допол., Думнова М. 8°. 392 с. 2400 экз. Ц. 1 р. 25 к.

**Травчетовъ, И. И.** Замѣтка объ изложеніи въ курсахъ алгебры вопроса о максимумъ и минимумъ трехчлена. (Кр. обзоръ дѣят. Пед. Музея с. 277—278). Педаг. Сб. № 7.

**Штулевичъ, П.** Сборникъ задачъ предлагавшихся на конкурсныхъ испытаніяхъ въ Институтахъ И. П. С., Горн., Техн. и др. Алгебра и арифметика. 1220 задачъ съ подробн. рѣшеніями. Изд. 2. Спб. 1900 8°. 466 с. 5750 экз.

## 6. Алгебра высшая.

### а. Теорія уравненій.

**Каганъ, В. Ф.** О нѣкоторыхъ неприводимыхъ полиномахъ. Прот. Спб. Мат. О. с. 114—116.

**Наченовскій, И.** О рѣшеніи уравненій 3-й и 4-й степени В. Оп. Физ. № 271 с. 169—173.

**Марновъ, В. А.** Теорема изъ В. Алгебры Прот. Спб. Мат. О. с. 26. **Ивановъ, И. И.** Другое доказательство теоремы В. А. Маркова ib. с. 34, **Марновъ, В. А.** Нѣкоторыя обобщенія той же теоремы. ib. 36—40.

**Новиковъ, П. М.** О наивыгоднѣйшемъ числѣ пробъ при рѣшеніи трансцендентныхъ уравненій и уравненій высшихъ степеней. Прот. Спб. Мат. О. с. 28—30.

**Синцовъ, Д.** По поводу статьи „Рѣшеніе кубическаго уравненія“. С. Гирмана. В. Оп. Ф. № 273 с. 241—242.

### б. Теорія формъ.

**Алексѣевъ, В. Г.,** проф. Теорія раціональныхъ инвариантовъ бинарныхъ формъ въ направленіи Софуса Ли, Кэли и Аронгольда VIII+232 с. 8°. (Уч. Зап. Юрьевск. Ун. кн. 4 прилож.),

## 7. Теорія вѣроятностей, способъ наименьшихъ квадратовъ.

**Забудскій, Н. А.** Теорія вѣроятностей и примѣненіе ея къ стрѣльбѣ и пристрѣлкѣ. 8°. с. 425+XXI. Спб. 1898 г.

**Марновъ, А. А.** Приложение непрерывныхъ дробей въ вычисленію вѣроятностей. Изв. Каз. Ф.-М. О. (2) IX, с. 29—34. **Марновъ, А. А.** Отвѣтъ. Изв. Каз. Ф.-М. О. (2) IX, с. 41—43.

**Некрасовъ, П. А.** По поводу статьи А. А. Маркова „Законъ большихъ чиселъ ест. Изв. Каз. Ф.-М. О. (2) т. IX, с. 18—26.

**Его же.** Предѣлы погрѣшностей приближенныхъ выраженій вѣроятности  $P$ , рассматриваемой въ теоремѣ Якова Бернулли. Моск. Мат. Сб. XX с. 485—534.

Его же. Къ статьѣ „Предѣлы погрѣшностей приближенныхъ выраженій вѣроятности etc“. ib. с. 535—548.

Савичъ, С. Е. Элементарная теорія страхованія жизни и трудоспособности Спб. 1900 г. Тип. Ак. Н. 8. 409 с. 1012 экз.

#### 8. Анализъ бесконечно малыхъ.

Общія основанія. Дифференціальное и интегральное исчис. Руководства.

Буссинескъ, Ж. Анализъ бесконечно—малыхъ. Пер. А. П. Ненашева. Т. I. Дифференціальное исчисленіе. Ч. I. Элементарный курсъ. М. Тип. Лисснера и Гемеля 8°. 312 с. 1200 экз.

Ермановъ, В. П. Дифференціальное исчисленіе. Курсъ лекцій, читанный въ Кіевскомъ Политехническомъ Институтѣ. Кіевъ. 8°. С. 52 + 100. Ч. I. Дифференцированіе функцій. II Исслѣдованіе функцій. III. Приложеніе къ геометріи.

Ивановъ М. М. Объ одномъ интегралѣ. Прот. Спб. Мат. О. с. 72—73.

Мининъ, А. П. Сборникъ задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. Спб. 8°. 78 с. 1200 экз. Ц 60 к.

Сонинъ, Н. Я. Объ остаточномъ членѣ въ формулѣ Лагранжа для интерполированія. Прот. Спб. Мат. О. с. 108—110.

Тихомандрицкій, М., проф. Курсъ теоріи вѣроятностей. Харьк. 1898. 8°. VII + 103. (Изд. Харьк. Унив.).

Тихомандрицкій, М. Курсъ дифференціального и интегрального исчисленій. Съ примѣрами для упражненій. Изд. 2 испр. Вып. 2-й. Харьковъ. Ц. 2 р. 50 к.

Филипповъ М. М. Объ арифметическомъ дифференцированіи. Прот. Спб. Мат. О. с. 84—91.

Френе, Ф. Сборникъ задачъ по анализу бесконечно малыхъ. Ч. I. Дифференціальное исчисленіе. М. 8°, 216 с. 1800 экз. Ц. 1 р. 50 к.

Чебышевъ, П. Л. О приближенномъ вычисленіи одного опредѣленнаго интеграла. Прот. Спб. Мат. О. с. 45—48.

Шиффъ, В. Сборникъ упражненій и задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. Ч. I изд. 2. испр. и доп. Спб. 8°. 405 стр. и 1 табл. черт. 1212 экз. Ц. 2 р.

9. Интегрирование дифференциальных уравнений.

Нояловичъ, Б. М. О соотношеніяхъ между частными рѣшеніями нѣкоторыхъ дифф. уравненій 1-го порядка. Прот. Спб. Мат. О. с. 74—77.

Его же. Нѣсколько примѣчаній объ интегрированіи уравненія  $udy - ydx = Rdx$ . Прот. Спб. Мат. О. с. 106—108, 113—114.

Его же. Объ одномъ способѣ интегрированія обыкновенныхъ дифференциальныхъ уравненій 1-го пор. Прот. Спб. Мат. О. с. 22—25, 27—28.

Поссе, Н. А. По поводу статьи проф. П. А. Некрасова „Способъ В. Г. Имшенецкаго etc.“. Прот. Спб. Мат. О. с. 58—59.

Пшеборскій, А. П. Основныя задачи теоріи дифференциальныхъ уравненій. Физико-Математич. Науки, В. В. Бобынина. (2) Т. I.  $n^o$  1, с. 1—13. (Пробная лекція для полученія званія приватъ-доцента, читанная 16 октября 1897 г. въ Университетѣ св. Владимира).

Фельдблюмъ, М. Теорія уравненія Рикатти и свойства функций ему удовлетворяющихъ. (Оконч.). Варш. Ун. Изв. III с. 73—104. IV с. 105—144.

б) Уравненія въ частныхъ производныхъ и полныхъ дифференциалахъ.

Граве, Д. А. Къ интегрированію системы диффер. уравненій линейныхъ въ частныхъ производныхъ высшихъ порядковъ. Прот. Спб. Мат. О. с. 15, 17—18.

Егоровъ, Д. Ѳ. Случай недостаточности обычнаго геометрическаго опредѣленія характеристикъ уравненія съ частными производными перваго порядка. Моск. Мат. Сб. XX. с. 608—615.

Руссянъ, Ц. Н. Условія интегрируемости  $m$  полными интегралами системы  $m$  независимыхъ обыкновенныхъ дифференциальныхъ уравненій  $\sum_k X_k^{(i)} dx = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, p$ )... Зап. Новоросс. Ун. Т. 76 с. 41—64.

Его же. Другой способъ опредѣленія условій интегрируемости  $m$  независимыхъ обыкновенныхъ дифференциальныхъ

уравнений  $\sum X_k^{(i)} dx_k$  ( $k=1,2..p$ ,  $i=1,2..m$ )  $m$  полными интегралами. Зап. Новоросс. Унив. 76 с. 157—168.

Его же. О двухъ типахъ простѣйшихъ формъ дифференціальныхъ выраженій  $\sum X_k dx_k$  ( $k=1,2..p$ ). Зап. Новоросс. Унив. Т. 76 с. 65—70.

Его же. Система уравненій Pfaff'a Зап. Новоросс. Ун. т. 76 с. 385—576.

Салтыковъ, Н. Н. Обобщеніе перваго способа Якоби интегрированія диффер. уравненія съ частными производными 1 порядка одной неизвѣстной функціи. Сообщ. Харьк. Мат. О. (2) VI с. 225—234.

Его же. Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Харьк. 1899. с. VII+127 Уч. Зап. И. Харьк. Ун. кн. 3.

Синцовъ, Д. М. Условія интегрируемости дифференціаловъ  $\sum X dx$ . Изв. Каз. Ф.-М. О. (2) IX, с. 38—40.

Шиффъ, П. А. Объ одномъ уравненіи въ частныхъ производныхъ. Протоколы Спб. Мат. О. с. 12—13.

#### 10. Варіаціонное исчисленіе.

Циммерманъ, В. А. Правило Эйлера въ примѣненіи въ одному классу вопросовъ объ относительныхъ тахіта и тіпіта. Зап. Новоросс. Ун. 76 с. 1—204. Отзывъ И. В. Слешинскаго. Тамъ же ч. оф. с. 13—18.

#### 11. Теорія функцій, функціи эллиптическія и пр.

Бѣлянкинъ, И. И. Выводъ тождества Вейерштрасса въ теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ. Изв. Каз. Ф.-М. О. (2) IX с. 35—37.

Граве, Д. А. Объ основныхъ предложеніяхъ теоріи функцій двухъ вещественныхъ переменныхъ. Сообщ. Харьк. М. О. (2) VI с. 251—287.

Его же. Новое доказательство основной теоремы ученія о неявныхъ функціяхъ. Сообщ. Харьк. Унив. М. О. (2) VI с. 288—293.

Его же. Объ одной эллиптической функціи. Прот. Спб. Мат. О. с. 100—111.

**Некрасовъ, В. Л.** Къ теоріи функцій вещественнаго переменнаго. Дневникъ X. Сѣзда с. 427—430. (Пропускъ за 1898-й годъ).

**Петровичъ С.** Опытъ элементарной теоріи веерштрассовыхъ функцій *ри*, *зи* и *би*. Съ приложеніемъ статьи объ эллиптическихъ функціяхъ *зпи*, *спи* и *дпи*. М. 1898. 8°. VII+151. (Пропускъ за 1898-й годъ).

**Синцовъ, Д. М.** Связь между эллиптическими и гиперболическими функціями. Изв. Каз. Ф.-М. О. (2) IX, с. 27—28.

**Столяровъ, Н. А.** Преобразование ультра эллиптическихъ квадратуръ. Кіев. Унив. Изв. № 8. 14 с.

**Тимченко, И.** Основанія теоріи аналитическихъ функцій. Одесса Т. I, ч. II и III стр. 1—XV, 473—655 и I—IV. (Записки Мат. Отд. Новор. О. Ест. Т. XVI и XIX).

## 12. Теорія строкъ, разложеніе функцій въ строки.

**Назимовъ, П. С.** О распространеніи способовъ Ньютона и Лагранжа наименьшихъ и наибольшихъ показателей въ двумъ уравненіямъ. Дневникъ X сѣзда с. 106. (Пропускъ за 1898-й годъ).

**Синцовъ, Д. М.** Объ „аналитическомъ параллелограммѣ“ Лагранжа—Ньютона. (Историческая справка). Изв. Каз. Ф.-М. О. (2) IX, п° 3 с. 44—46.

**Его же.** Къ вопросу о сходимости строкъ, Моск. Мат. Сб. XX с. 616—619.

## Геометрія.

### 13. Основанія геометріи.

**Наганъ, В.** Очеркъ геометрической системы Лобачевского (Ожонч.), В. Оп. Физ. № 272 с. 204—218 № 275 с. 281—288.

**Новиковъ, П. М.** О геометріи Лобачевского по поводу мнѣній о немъ профессоровъ В. Я. Цингера и П. А. Некрасова. (Пед. Сб. № 5, 7). Обзоръ дѣят. Педаг. Музея за 97—98 г. с. 254—263.

#### 14. Геометрія елементарная.

##### а) Учебники и задачник.

**Воиновъ, А.** Сборникъ геометрическихъ задачъ на вычисленіе, съ приложеніемъ задачъ рѣшаемыхъ при помощи тригонометріи. Изд. 2 испр. и доп. М. 8°. 148 с. 1200 экз. Ц. 75 к.

**Волновъ, М. С.** Особенный выводъ теоремы: Къ прямой въ данной ея точкѣ О можно провести перпендикуляръ и только одинъ, (Пед. Сб. 7). Обзоръ дѣян. Пед. Музея за 97—98 с. 280—281.

**Вулихъ, З.** Краткій курсъ геометріи и собраніе геометрическихъ задачъ. Изд. 20. Спб. 8°. 210 с. 20000 экз. Ц. 80 к.

**Д. Е.** Новая геометрія треугольника. (Продолж.). В. Оп. Ф. № 273 с. 233—241.

**Давидовъ, А.** проф. Элементарная геометрія въ объемѣ гимназическаго курса. Изд. 19. М. 8°. 348 с. 25000 экз. Ц. 1 р. 35 к.

**Ниселевъ, А.** Элементарная геометрія для среднихъ учебн. заведеній. Изд. 7. М. 8°. 312 стр. 10200 экз. Ц. 1 р. 10 к.

**Коротковичъ, М. А.** Сборникъ задачъ по физикѣ и геометріи предлагавшихся на конкурсныхъ испытаніяхъ въ институтахъ Инж. П. Сообщ., Технологич. и др. Спб. 8°. 97 с. 1000 экз. Ц. 1 р.

**Крутиновъ, Ѳ. П.** Пособіе для полного рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе помѣщенныхъ въ пріемной программѣ. И. П. С. Спб. 8°. 76 с. и III л. черт. 1200 экз. Ц. 1 р.

**Малининъ, А.** Геометрія и собраніе геометрическихъ задачъ. Рук. для уѣздн. и гор. учил. Изд. 11. М. 8°. 200 с. 16800 экз. Ц. 65 к.

**Миреновъ, П.** Учебникъ геометріи съ приложеніемъ 1) вопросовъ для повторенія и 2) собранія геометрическихъ задачъ. Ч. II: Изд. 3 улучш. М. 8°, 152 с. 1200 экз. Ц. 40 к.

Сборникъ рѣшеній задачъ помѣщенныхъ въ геометріи **А. Ниселева** Сост. Ф. Б. М. 8. 107 с. 1200 экз.



**Страховъ, М. А.** Краткій курсъ геометріи съ практическими примѣненіями 306 черт. въ текстѣ. Изд. 4-е. Спб. 8°. 143 с. 6000 экз.

**Шафровъ, И.** Учебникъ геометріи. Концентр. III. Курсъ 5-го отдѣленія город. училищъ. Изд. Тихомирова. М. 8°. 127 с. 2400 экз. Ц. 40 к.

**Шидловскій В.** Рецензія: Ф. Клейнъ. Лекціи по избраннымъ вопросамъ эл. геометріи. Пед. Сб. № 8 с. 158—162.

**Федоровъ, Е. С.** „О симметріи на плоскости“. Прот. Спб. Мат. О. с. 21.—Его же. Гониометрическіе приборы для нагляднаго ознакомленія съ видами симметріи. Ib. с. 31—33.

#### б) Тригонометрія.

**Агаповъ, Д. В.** Приложение теоріи круговыхъ функций въ тригонометріи. Методы рѣшенія треугольниковъ. Для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Оренбургъ 1899. Ц. 1 р.

**Волновъ, М. С.** Геометрическій выводъ формулы Мольтвейде. (Педаг. Сб. № 7). Обзоръ дѣятельности Педагог. Музея с. 278—279.

**Крутиковъ, Ѳ. М.** О счетѣ дополнительныхъ угловъ. (Кр. обзоръ дѣят. Педаг. Музея с. 282—283.

**Крыловъ, А. Н.** Учебникъ сферической тригонометріи для мореходныхъ учебныхъ заведеній. Спб. 8° 124 с. 1200 экз. Ц. 60 к.

**Малининъ, А.** Руководство прямолинейной тригонометріи для гимн. и реальн. учил. Изд. 15. М. 8°. 112 стр. 6000 экз. Ц. 60 к.

**Новиковъ, П. М.** О вычисленіи помощью вспомогательнаго угла. (Пед. Сб. № 7). Обзоръ дѣят. Педаг. Музея за 97—98 г. с. 174—277.

**Его же.** Рѣшеніе задачи о построеніи треугольника по биссектрисамъ. (Пед. сб. 5). Обзоръ дѣят. Педагог. Музея с. 246—249.

**Рейберъ, А. проф.** Курсъ элементарной тригонометріи и собраніе примѣровъ и упражненій. Пер. Н. Н. Жоржъ. Изд. 2. испр. Спб. 8°, 207 с. 3000 экз. Ц. 85 к.

**Рыбинъ, Н.** Собраніе стереометрическихъ задачъ тре-

бующихъ примѣненія тригонометріи Изд. 5 М. 8°. 85 с. 3600 экз. Ц. 40 к.

Шапошниковъ, Н. А. Курсъ прямолинейной тригонометріи и собраніе тригонометрическихъ задачъ. Изд. 7. М. 8°. 136 с. 2400 экз. Ц. 80 к.

с) Приложение алгебры къ геометріи.

Блюмбергъ, Я. Дополнительные статьи алгебры, съ предшеств. статью „Приложение алгебры къ геометріи“. Курсъ VII (доп.) кл. реальн. учил. Изд. 6-е, пересм. и доп. Спб. 8°. 148 с. 2000 экз. Ц. 1 р.

15. Геометрія проєктивная и начертательная, геометрическое черченіе.

Беннеръ, Б. Руководство къ геометрическому и инженерному черченію. Текстъ. М. 98. Тип. Ловенсонъ 8°. 71 стр. 5000 экз. (Пропускъ за 1898-й годъ).

Норинановъ, В. Краткій практическій курсъ геометрическаго черченія и землемѣрія въ связи съ необходимыми свѣдѣніями по геометріи 490 черт. въ текстъ. Спб. Тип. Аргольда 8°. VI+176 с. 3000 экз. Ц. 50 к.

Метеричеръ, П. И. Геометрическое черченіе для ремесл., технич. и др. учебн. заведеній, гдѣ преподается черченіе, и для самообученія, со 115 фиг. на 16 лиф. чертежей. Изд. 3. Одесса. 8°. 64 с. 1100 экз.

Шамшиновъ, А. Краткое руководство для изученія правилъ перспективы, приспособленное для учащихся въ средне-учебныхъ завед. и для начинающихъ художниковъ. Рис. 131. Тифлисъ. 8°. 40 с. 3000 экз. Ч. 1 р.

16. Геометрія аналитическая.

Граевъ П. П. О построеніи кривыхъ 3 степени. (Оконч.). Уч. Зап. Каз. Унив. С. LXVI кн. 2, с. 1—64.

Нотельниковъ, А. П. Проєктивная теорія векторовъ. Изв. Казан. Ф.-М. О. (2) VIII. (л. 8—11), IX № 1 (л. 12—15), № 2 (л. 16—20).

Schoute. P. H. Sur la courbe de Iacobi d'un réseau des quadriques. Изв. Каз. Ф.-М. В. (2) т. IX, с. 1—17.

**Пржевальскій, Е.** Аналитическая геометрія и собраніе задачъ изъ аналитической геометріи. Изд. 4-е. М. 8°. 340 с. 2400 экз. Ц. 2 р.

17. Геометрія дифференціальная.

а) Теорія поверхностей.

**Аленстевъ, В. Г.** Теорія прямолинейныхъ конгруэнцій въ связи съ теоріей поверхностей (по лекціямъ проф. Darboux). Ученыя Зап. Моск. Ун. Вып. 14 с. 1—98.

**Бунтѣвъ, Б. Я.** Элементы теоріи поверхностей. Кіевск. Ун. Изв. № 12 с. 81—156.

**Млодзѣвскій Б. Н.** О конформномъ сродствѣ параллелизма между поверхностями. Моск. Мат. Сб. XX. с. 620—630.

**Сохомскій, Ю. В.** О геодезическихъ линіяхъ. Протоколы Спб. Мат. О. с. 10—11.

**Тиссо, М. А.** Изображеніе одной поверхности на другой и составленіе географическихъ картъ. Пер. Д. П. Рашковъ. Москва. 8°. 298 с. 600 экз. Ц. 3 р.

18. Механическіе и др. способы вычисленія, таблицы и пр.

**Делоне, Н. Б.** О сферопланѣ и о черченіи географическихъ картъ. Прот. Спб. Мат. О. с. 54.

**Новалевскій, С.** Двойной нониусъ, его теорія и примѣненіе. Спб. Тип. Стасюлевича 8°, 20 стр. и 3 табл. черт. 2000 экз.

**Норнаковъ, В.** Приборы и пособія необходимыя для уроковъ геометрическаго черченія и краткаго курса землемѣрія въ нар. школахъ. 182 черт. въ текстѣ Спб. 99 тип. Синод. 8°. 97 стр. 1000 экз. Ц. 45 к.

**Мормовъ, А. П.** Общедоступное руководство въ счетной линейкѣ, съ приложеніемъ чертежа линейки. Вятка. Ц. 20 к.

**Нетыкса, М. А.** Техника черченія. О томъ, какъ и чѣмъ чертить. Изд. 2-е, знач. доп. М. 98. Тип. Тов. Кушнерова 8°. 397 с. 1200 экз. Ц. 2 р. 75 к.

### Механика.

**Грузинцевъ, А. П.** Теорія капиллярности и гидростатика. Сообщ. Харьк. Мат. О. (2) VI. 235—250.

**Делоне, Н. Б.** О движеніи твердаго тѣла, опредѣляемомъ интегралами С. В. Ковалевской. Прот. Спб. Мат. О. с. 25—26.

**Домогоаровъ, Ар.** Основы механики, Вып. II Кинематика. Изд. Инст. П. С. Спб. 8°. 212 с. 2250 экз.

**Колосовъ, Г. В.** Объ одномъ случаѣ движенія твердаго тѣла Сообщ. Харьк. Мат. О. (2) VI. с. 194—199.

**Его же.** О шарѣ съ гироскопомъ Гесса внутри катящемся по гладкой плоскости безъ скольженія. Прот. Спб. Мат. О. с. 127—128.

**Мещерснй, И. В.** Задача о движеніи системы точекъ при дѣйствіи силъ обратно-пропорціальныхъ кубу разстоянія и центральныхъ пропорціональныхъ разстоянію. Прот. Спб. Мат. О. с. 80.

**Его же.** Къ задачѣ п—тѣлѣ. Прот. Спб. Мат. О. с. 49.

**Его же.** Замѣтка объ аналитическихъ силахъ. Прот. Спб. Мат. О. с. 118—120.

**Розенбергъ, В. Л.** О наклонной плоскости (Кр. обзоръ дѣят. Педаг. Музея 97—98 г. с. 286—288.

**Салтыновъ, Н. Н.** Разысканіе интеграловъ общихъ задачъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити. Сообщ. Харьк. М. О. (2) VI с. 203—224.

**Чемолосовъ, С. С.** Опредѣленіе поверхностей и объемовъ тѣлъ вращенія при помощи теоремы Гюльдена. Для учениковъ 7 и 8 класса М. 8°. 36 с. 500 экз.



## АЛФАВИТНЫЙ СПИСОКЪ АВТОРОВЪ.

(Цифры означаютъ страницы Указателя).

Агаповъ, Д. В. 11, 19.  
Аладовъ, И. С. 10.  
Алексѣевъ, В. Г. 13, 21.  
Алексѣевскій, В. П. 10.  
Арбузовъ, В. 7.

Бахчисарайцевъ, Г. 6.  
Беккеръ, Б. 20.  
Беллюстинъ, В. 5, 7.  
Бертранъ, Ж. 11.  
Билибинъ, Н. 11.  
Блюмбергъ, Я. 20.  
Бобылевъ, Д. Н. 4.  
Бобынинъ, В. В. 3, 4.  
Бугаевъ, Н. В. 10.  
Букрѣевъ, Б. Я. 21.  
Бунинъ, Е. 4.  
Буренинъ, Н. 6, 8, 12.  
Буссиносъ, Ж. 14.  
Быковъ, М. Я. 6.  
Бычковъ, О. 7.  
Бѣляевскій, С. И. 7.  
Бѣлякинъ, И. И. 16.

В. Г. 4.  
Вальцовъ, Н. Н. 9, 10.  
Васильевъ, В. И. 6.  
Верещагинъ, М. 6, 11.  
Виноградовъ, М. С. 7.  
Вишневскій, Г. М. 5, 7.  
Вонновъ А. 18.

Волновъ, М. С. 11, 18, 19.  
Вороной, Г. О. 11.  
Вороновъ, А. 7.  
Вроблевскій В. 11.  
Вулихъ, З. 18.

Глаголевъ, А. Н. 6.  
Гольденбергъ, А. И. 5, 7, 8.  
Граве, Д. А. 15, 16.  
Граве, П. П. 20.  
Грузинцевъ, А. П. 22.  
Гюйо, М. 4.  
Гэдз, О. В. 5.

Д. Е. 18.  
Давидовъ, А. 18.  
Делоне, Н. Б. 21, 22.  
Дермавинъ, М. 8.  
Домогаровъ, Ар. 22.  
Дюбуа-Реймонъ, Е. 4.

Евтушевскій, В. А. 5, 8.  
Егоровъ, Д. О. 15.  
Егоровъ, О. И. 8.  
Ермаковъ, В. П. 14.

Житковъ, С. В. 8.

Забудоній, Н. А. 13.

Ивановъ, И. И. 10, 13, 14.

Наганъ, В. Ф. 13; 17.  
Наченовскій, И. 13,  
Киселевъ, А. 6, 12, 18,  
Ковалевскій, С. 21.  
Колосовъ, Г. В. 22,  
Комаровъ, А. Ф. 8,  
Комберуссъ, 6.  
Контъ, О. 4.  
Корнановъ, В. 20, 21.  
Короткевичъ, М. А. 18.  
Котельниковъ, А. П. 20.  
Кояловичъ, Б. М. 15,  
Крутиновъ, О. И. 19.  
Крутиновъ, О. П. 18.  
Крыловъ, А. Н. 19.

Леженъ-Диришле, 11.  
Лобачевскій, Н. И. 4.  
Лубенецъ, Т. 8.

Малининъ, А. 6,, 8, 12, 18, 19.  
Малышевъ, И. 6.  
Мансфельдъ, А. 6.  
Марковъ, А. А. 12, 13.  
Марковъ, В. А. 13.  
Межеричеръ, П. И. 20.  
Меморскій, 5.  
Мещерскій, И. В. 22,  
Мининъ, А. 7.  
Мининъ, В. 7.  
Мининъ, А. П. 14.  
Мироновъ, П. 18.  
Михельсонъ, С. 6.  
Млодзѣевскій, Б. К. 21.  
Моржовъ, А. П. 21.

Н. С. 10.  
Назаровъ, Д. 7.  
Назимовъ, П. С. 17.  
Некрасовъ, В. Л. 17.  
Некрасовъ, Н. Я. 9.  
Некрасовъ, П. А. 13,, 14.  
Нетынса, М. А. 21.  
Никольцевъ, П. 6, 12.

Новиковъ, П. М. 12, 13, 17, 19,.

Павловъ, А. 9.  
Петровичъ, С. 17.  
Плетневъ, И. 6.  
Poretzky P. S. 5.  
Поссе, Н. А. 15.  
Пржевальскій, Е. 21.  
Пшоборскій, А. П. 15.  
Пѣвницкій, С. Н. 12.

Рабцевичъ, В. В. 5.  
Рачинскій, С. 9.  
Рабьеръ, А. 19.  
Розенбергъ, В. А. 22.  
Рождественскій, Я. 10.  
Руссянъ, Ц. И. 15,, 16,,  
Рыбинъ, Н. 19.

Савичъ, С. Е. 14.  
Свѣшниковъ, П. 12.  
Салтыковъ, Н. Н. 16,, 22,  
Селивановъ, Д. Ф. 4; 11,, 12,  
Семена. 9.  
Серре. 6.  
Синцовъ, Д. М. 13, 16, 17,,  
Сонинъ, Н. Я. 14.  
Сорокинъ, П. 12.  
Сохоцкий, Ю. В. 4, 21.  
Станевичъ, В. И. 11.  
Столяровъ, Н. А. 17.  
Страховъ, М. А. 19.  
Стреналовъ, В. 11.  
Schoute. P. H. 20.

Тенишевъ, Б. А. 9.  
Тимченко, И. 17.  
Тиссо, М. А. 21.  
Тихомандрицкій, М. 14,,  
Тихомировъ, Е. И. 7, 12.  
Травчетовъ, И. И. 12.

Федоровъ, Е. С. 19  
Фельдблюшъ, М. 15.

Филипповъ, М. М. 14.  
Френе, Ф. 14.

Цвѣтковъ, П. 9.  
Цигельманъ, Н. Л. 7.  
Циншерманъ В. А. 16.

Чебышевъ, П. Л. 4,, 14.  
Чешолосовъ, С. С. 22.  
Чистяковъ: М. I. 11.

Шамшиновъ, А. 20.  
Шапошиниковъ, Н. А. 9, 10, 20.  
Шафровъ, И. 19.  
Шидловскій, В. 5, 19.  
Шиффъ, В. 14.  
Шиффъ, П. А. 16.  
Шмулевичъ, П. 12.  
Шохоръ-Троцкій, С. И. 10,  
Таворскій, А. 10.

---

1891

1892

1893

1894

1895

1896



**Издания Физико-математическаго Общества и физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ**

1) Собрание протоколовъ засѣданій секціи Физико-математич. наукъ Общ. Естеств. при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ (т. 1-й распродажъ; цѣна томовъ 2—8 съ портретами Н. И. Лобачевского, М. А. Ковальскаго, П. И. Котельникова и И. С. Громеки—7 р.).

2—4) Брошюры «М. А. Ковальскій» «П. И. Котельниковъ» «И. С. Громека» съ кабинетами. порт. по 60 к.

5) Уставъ Физико-математическаго Общества Ц. 5 к.

6) Каталогъ бібліотеки секціи; ц. 25 к.

7) Счетъ и измѣреніе—Гельмгольца. Понятіе о числѣ—Кронекера переводъ проф. А. Васильева. Ц. 50 к.

8) Систем. указатель книгъ и статей по чистой и приклад. математикѣ, напечатанныхъ въ Казани, сост. Д. М. Синцовъ. Ц. 25 к.

9) Вейерштрассъ. О Лудольфовомъ числѣ (доказательство невозможности квадратуры круга) пер. И. А. Скалозубова подъ ред. проф. А. Васильева. Ц. 30 к.

10—11) Конспекты публичныхъ лекцій, устроенныхъ Физико-Математическимъ Обществомъ весною 1895 г. (Ц. 30 к.) и весною 1896 г. (ц. 20 к.)

12) Ф. Клейнъ. Сравнительное обозрѣніе новѣйшихъ геометрическихъ изслѣдованій. Пер. Д. Синцовъ. Цѣна 35 к.

13) Торжество открытія памятника Н. И. Лобачевского 1 Сент. 1896 г. Ц. съ фототипіей памятника 25 к., безъ фот. 15 к.

14—15) Первое присужденіе преміи Н. И. Лобачевского въ 1897 г. Ц. 50 к.; Второе присужденіе преміи Н. И. Лобачевского (22 октября 1900 г. Ц. 40 к.)

16) F. Klein. Zur ersten Vertheilung des Lobatschewsky—Preises. Цѣна 50 коп.

17) In memoriam N. I. Lobatchevskii. (Collection des mémoires présentés à la Société Ph.-M. de Kasan par Hermite, Halsted, Girardville, Laisant, Lemoine, Neuberg et Ocagne. Prix 8 fr. (ц. 3 руб).

18) Ch. Hermite. Sur quelques développements en serie de la théorie des fonctions elliptiques. 1897. Prix 2 f. (цѣна 75 к.).

19) E. Lemoine. Géométrie. Transformation continue dans le triangle et dans le tétraèdre. 1897. Prix 3 fr. (цѣна 1 р.).

20) Ф. Клейнъ. Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи. Пер. Н. Н. Парфентьева подъ ред. Д. М. Синцова. 1898 г. Ц. 75 к.

21—24) Д. М. Синцовъ. Bibliographia mathematica rossica. Списокъ книгъ и статей по чистой математикѣ, напеч. въ Россіи—за 1896 г., за 1897 г., за 1898 г., за 1899 г. Ц. по 20 к.

25) P. Poretzky. Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques. Ц. 1 р.

26) Памяти Софуса Ли (сост. Д. М. Синцовъ). 1899 г. Ц. 30 к.

27) И. И. Аристовъ. Объ итерациіи функцій. 1900 г. ц. 50 к.

Продаются въ книжныхъ магазинахъ въ Казани и выписываются отъ казначея Общества А. А. Михайловскаго. (Университетъ, астроном. обсерваторія). Выписывающіе отъ казначея за пересылку не платятъ. Отъ него-же можно выписывать: (вырученные отъ продажи деньги поступаютъ въ фондъ имени Н. И. Лобачевского).

Г. Семикольновъ. Этюды по геометріи Лобачевского. Эт. I-й (теорема Пифагора въ геометріи Лобачевского). Ц. 1 р. Эт. II-й (Объ измѣреніи площадей фигуръ). Ц. 1 р.

Празднованіе столѣтней годовщины дня рожденія Н. И. Лобачевского. Изд. Императорскаго Казанскаго Университета (съ порт. Н. И. Лобачевского) ц. 1 р.

## **„ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА**

**ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.**

„Извѣстія“, издаваемые подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ четырехъ до шести въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20-ти листовъ.

«Извѣстія» раздѣляются на два отдѣла.

1) Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ Общества.

2) Второй отдѣлъ содержитъ:

а) Дѣтонисъ Физико-математическаго Общества (протоколы засѣданій, извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годовыя отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ бібліотеку Общества и т. п.).

б) Библиографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и за границею сочиненіяхъ по физико-математическимъ наукамъ. Научныя новости.

с) Задачи и вопросы, предлагаемые для рѣшенія, и рѣшенія ихъ.

Въ «Извѣстіяхъ» могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библиографическія и другія, имѣющія отношеніе къ физико-математическимъ наукамъ.

Члены Физико-математическаго Общества пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предъидущій годъ, получаютъ Извѣстія бесплатно.

Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „ИЗВѢСТІЯ“ въ годъ 3 р. (съ доставкою и пересылкою).

Подписка принимается предсѣдателемъ Физико-математическаго Общества проф. А. В. Васильевымъ, секретаремъ Общества пр.-доц. В. А. Ульянинымъ (Университетъ) и казначеемъ Общества А. А. Михайловскимъ (Университетъ), въ Казани книжными магазинами А. А. Дубровина (Гостинный дворъ № 1) и Н. Я. Вашмакова (Воскресенская, городской пассажъ), а также всѣми извѣстными книжными магазинами.

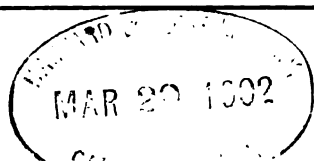
Первую серію „Извѣстій“ составляютъ восемь томовъ „Собранія протоколовъ засѣданій секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ“.

---

Sci 1105.1  
(By on 24

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE  
de Kasan.

Deuxième série. Tome X. № 4.



ИЗВѢСТІЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ X.

№ 4.

КАЗАНЬ.

Типо-литографія Императорскаго Университета.  
1901.

# СОДЕРЖАНИЕ.

Второе присужденіе преміи Н. И. Лобачевскаго 22 октября 1900 года.

Протоколъ торжественнаго засѣданія Физико-Математическаго Общества 22 октября 1900 г.

Отчетъ Коммисіи 2-го присужденія преміи.

Р. Болль. Отзывъ о математическихъ сочиненіяхъ A. N. Whitehead'a.

F. Engel. Gutachten über das Buch von W. Killing.

К. Андреевъ. Отзывъ о сочиненіи проф. W. Binder'a.

Prix Lobatchefsky (second concours 1900)

Положеніе о преміи.

## Table des matières.

Prix Lobatchefsky (second concours 1900).

---

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE  
de Kasan.

Deuxième série. Tome X. № 4.

---

Kazan, Russia - Univ. - Fiziko - matematicheskoe obshchestvo

# ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

---

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ X.

№ 4.



КАЗАНЬ.

Типо-литографія Императорскаго Университета.

1901.

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества  
при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ*.

# ПРОТОКОЛЬ

## (99) ТОРЖЕСТВЕННОГО ЗАСѢДАНІЯ

22 октября 1900 года.

1. Въ торжественномъ засѣданіи Общества состоялось второе присужденіе преміи Н. И. Лобачевского. Предсѣдатель проф. А. В. Васильевъ открылъ засѣданіе слѣдующей рѣчью.

Сегодня мы собрались для вторичнаго присужденія преміи имени Н. И. Лобачевского, присуждаемой черезъ три года. Мы премируемъ сегодня конечно не такіе труды, какъ составляющіе эпоху въ развитіи современной математики труды Софуса Ли по теоріи преобразованій, премированные три года тому назадъ, но тѣ два сочиненія, которыя, какъ Вы узнаете изъ доклада Коммисіи, она сочла одинаково достойными преміи имени великаго геометра, свидѣлствуютъ о томъ интересѣ, съ которымъ ученые всѣхъ странъ изучаютъ ту вѣтвь знаній, которой положено начало Лобачевскимъ.

Одно изъ этихъ сочиненій—то, которому по жребію выпало получить самую премію—представляетъ систематическое изложеніе изслѣдованій по неевклидовой геометріи, „наиболѣе полное изъ всѣхъ появившихся до настоящаго времени,“ по справедливому замѣчанію почтеннаго референта проф. Энгеля. Сочиненіе проф. Киллинга: „Einführung in die Grundlagen der Geometrie“ даетъ возможность познакомиться, не прибѣгая къ первоисточникамъ, и съ основаніями неевклидовой геометріи и съ отношеніемъ неевклидовой геометріи

къ проэктивной и съ теорією пространствъ многихъ измѣреній и съ приложеніями теоріи преобразованій; при этомъ сочиненіе Killing'a является и завершеніемъ продолжительныхъ самостоятельныхъ работъ автора по неевклидовой геометріи, относившихся главнымъ образомъ къ тѣмъ интереснымъ пространственнымъ формамъ, на существованіе которыхъ впервые указалъ Клиффордъ и которыя Киллингъ предложилъ называть Клиффордъ-Клейновскими пространственными формами. Работы проф. Киллинга начались еще въ 1881 г; въ 1885 г. онъ издалъ большое самостоятельное сочиненіе, посвященное неевклидовымъ пространственнымъ формамъ, и въ разное время имъ написано большое число мемуаровъ, посвященныхъ механикѣ въ неевклидовыхъ пространственныхъ формахъ, теоріи преобразованій и т. п. Преміруемое нынѣ сочиненіе является до нѣкоторой степени завершеніемъ самостоятельныхъ работъ автора.

Другое сочиненіе, признанное комиссією имѣющимъ равное съ сочиненіемъ Киллинга право на премію имени Н. И. Лобачевского, сочиненіе англійскаго математика Уайтхеда: „Universal Algebra“ даетъ систематическое изложеніе изслѣдованій знаменитаго нѣмецкаго математика Грассмана и ихъ приложеній къ неевклидовой геометріи и потому будетъ имѣть весьма важное значеніе для развитія методовъ Грассмана. Судьба научныхъ изслѣдованій Грассмана и его жизненная карьера представляетъ многія сходства съ судьбою и жизнью нашего Лобачевского. Подобно Лобачевскому Грассманъ всю жизнь (1809—1877) провелъ въ небольшомъ провинціальномъ городѣ вдали отъ другихъ умственныхъ центровъ Германіи, здѣсь въ тиши и уединеніи онъ съ упорствомъ и настойчивостью разработывалъ свои идеи объ новой математической наукѣ, которая должна составлять абстрактное основаніе всей геометріи и которой онъ придалъ названіе „Ausdehnungslehre“. Подобно Лобачевскому Грассманъ всю жизнь долженъ былъ испытывать горечь непризнанія другими учеными значенія и важности его идей. Въ 1844 г. онъ издалъ свое сочиненіе „Ausdehnungslehre“ въ которомъ его методъ былъ изложенъ въ достаточной полнотѣ и систематич-



ности. Но несмотря на то, что это сочиненіе было написано на языкѣ, доступномъ большинству математиковъ Европы, его постигла та-же судьба, какъ и сочиненія Лобачевского. Современные Грассману великіе геометры Гауссъ и Мёбиусъ относились съ большимъ интересомъ къ его книгѣ, но въ то-же время ихъ оттолкнула ея „философская общность“; спустя восемь лѣтъ послѣ появленія книги Грассмана извѣстенъ былъ только одинъ математикъ, прочитавшій всю книгу сполна. Та-же участь постигла и другое сочиненіе, изданное Грассманомъ въ 1862 г., въ которомъ онъ изложилъ свою систему въ иной формѣ, подобно тому какъ Лобачевскій сдѣлалъ это для своей системы въ своей „*Rangéométrie*“. Тогда Грассманъ оставилъ свои математическія изслѣдованія и несмотря на свой пятидесяти-трехлѣтній возрастъ съ жаромъ юности принялся изучать новую область знанія—филологію и достигъ замѣчательныхъ успѣховъ въ изученіи Ригведы. Но Грассманъ былъ и счастливѣе Лобачевского; доживъ до 68 лѣтъ, онъ могъ уже на закатѣ своихъ дней видѣть, что его идеи получаютъ и примѣненіе и признаніе. Еще за десять лѣтъ до его смерти въ 1867 г. появилась небольшая, но изящно написанная книга Г. Ганкеля: „Теорія системъ комплексныхъ чиселъ“, въ которой идеи Грассмана были изложены съ большею ясностью. Около того-же времени Викторъ Шлегель начинаетъ свою плодотворную дѣятельность, посвященную разработкѣ и популяризаціи идей Грассмана.

Въ чемъ заключается заслуга Грассмана? Она прежде всего именно въ той „философской общности“, которая оттолкнула отъ сочиненія Грассмана чистыхъ геометровъ, какъ Мёбиуса, и даже такой широкій умъ, какъ Гаусса. На первой—же страницѣ „*Ausdehnungslehre*“ Грассманъ рассматриваетъ математику, не какъ ученіе о величинахъ, но какъ болѣе общее ученіе о формахъ. Она изучаетъ или прерывную форму—цѣлое число или непрерывную форму—собственно величину. Наука о прерывной формѣ состоитъ изъ двухъ отдѣловъ: ученія о числахъ и ученія о комбинаціяхъ. Непрерывная форма можетъ быть двухъ родовъ: или насъ интересуетъ въ непрерывной величинѣ исключительно одинъ ея эле-

ментъ—напряженность; такова масса, температура и другія величины, зависящія только отъ одной единицы (скалярныя величины у англійскихъ авторовъ). Но мы можемъ ввести въ математику величины, зависящія отъ нѣсколькихъ единицъ, изучать системы чиселъ (пары, тройки) или комплексныя числа съ многими единицами. Такія экстензивныя величины приходится разсматривать въ геометріи и механикѣ: векторъ опредѣленной длины и опредѣленнаго направленія, матеріальную точку опредѣленнаго положенія и опредѣленной массы и т. п. Обобщить понятіе о величинѣ и операціяхъ надъ величинами до такой степени, чтобы мы могли подвести подъ понятіе о величинѣ векторы, массовыя точки и т. п.—въ этомъ и заключается основная идея „Ausdehnungslehre“ Грассмана. Такую величину онъ называетъ „Ausdehnungsgrösse“. Созданное имъ ученіе есть ученіе болѣе общее, чѣмъ обыкновенная алгебра, включая въ нее и алгебру комплексныхъ чиселъ вида  $a + bi$ . Въ немъ разсматриваются, какъ и въ алгебрѣ, двѣ операціи: сложеніе и умноженіе: но законы умноженія болѣе общи, чѣмъ законы умноженія въ обыкновенной алгебрѣ. Это болѣе общее ученіе и достигаетъ той цѣли, которую поставилъ себѣ Грассманъ: оно есть вѣтъ чистой математики, абстрактная наука, соответствующая геометріи и механикѣ. Грассманъ имѣлъ предшественника въ Мебіусѣ, авторѣ „баричентрическаго исчисленія“, и одновременно съ Грассманомъ Гамильтонъ въ Англіи развивалъ теорію кватерніоновъ. Но никто изъ нихъ не дошелъ до той общности, съ которою Грассманъ излагалъ свое ученіе. Между тѣмъ какъ Гамильтонъ и Мебіусъ изобрѣтали символы для представленія соотношеній геометріи трехъ измѣреній и механики, Грассманъ является болѣе чѣмъ кто-либо создателемъ теоріи пространства многихъ измѣреній. Разсматривая вопросы съ болѣею общностью, онъ въ то-же время далъ много весьма важныхъ приложений къ геометріи и механикѣ съ одной стороны, къ теоріи смѣшенія цвѣтовъ съ другой. Гельмгольцъ въ своей „Physiologische Optik“ приводитъ изслѣдованія Грассмана по этому послѣднему вопросу.

Сочиненіе Уайтхеда посвящено изложенію методовъ и

идей Грассмана въ приложеніи къ неевклидовой геометріи; о томъ, какъ выполнена Уайтхедомъ эта поставленная себѣ цѣль, Вы узнаете изъ реферата проф. Болля. Прибавимъ, что сочиненіе Уайтхеда представляетъ только первый томъ задуманнаго имъ большаго сочиненія, второй томъ котораго будетъ посвященъ теоріи кватерніоновъ Гамильтона и другимъ способамъ изложенія алгебры векторовъ, даннымъ Gibbs'омъ, Макфарланомъ, Heaviside и др.; тамъ-же будетъ изложена и теорія бикватерніоновъ Клиффорда, изученная А. П. Котельниковымъ въ его сочиненіяхъ.

Изъ сказаннаго видно, какъ неевклидова геометрія входитъ въ болѣе и болѣе тѣсное соотношеніе съ различными областями математическаго знанія. Въ премированныхъ три года тому назадъ работахъ Софуса Ли равно какъ и въ премируемомъ нынѣ сочиненіи Киллинга неевклидова геометрія поставлена въ тѣсную зависимость съ теоріею преобразованій; въ сочиненіи Уайтхеда на помощь неевклидовой геометріи приходятъ широкія по общности идеи Грассмана.

Но не одними премируемыми сочиненіями исчерпывается конечно движеніе науки въ области неевклидовой геометріи за послѣдніе годы. Въ 1899 г. появилось классическое сочиненіе Гильберта „Grundlagen der Geometrie“, въ которомъ вопросъ объ аксіомахъ геометріи получилъ замѣчательное рѣшеніе и о которомъ я имѣлъ уже случай говорить Обществу.

Одинъ изъ нашихъ референтовъ проф. Лейпцигскаго университета Фр. Энгель, извѣстный своими трудами по разработкѣ теоріи преобразованій и изложенію теорій Ли: („Theorie der Transformationsgruppen“; третій томъ которой премированъ былъ три года тому назадъ есть одинъ изъ такихъ трудовъ проф. Engel'я) издалъ въ 1899 г. большой томъ содержащій переводъ на нѣмецкій языкъ двухъ сочиненій Лобачевского въ первый разъ появляющихся на языкѣ доступномъ большинству математиковъ (О началахъ геометріи и Новыя начала геометріи) съ обширными комментаріями, значительно облегчающими пониманіе этихъ работъ. Къ сочиненію приложена прекрасная біографія Н. И. Лобачевского. Нѣтъ необходимости настаивать на томъ значеніи, которое

имѣть и для исторіи неевклидовой геометріи этотъ трудъ проф. Энгеля, равно какъ и изданное имъ ранѣе совместно съ проф. Штекелемъ сочиненіе: *Theorie der Parallellinien*.

Большое значеніе имѣетъ также только-что вышедшій 8-й томъ сочиненій Гаусса, въ которомъ проф. Штекель тщательно собралъ всѣ отзывы Гаусса о неевклидовой геометріи и всѣ дошедшіе до насъ отрывки его работъ по основаніямъ геометріи.

На ряду съ математическою и историческою разработкою неевклидовой геометріи и вообще вопроса объ основаніяхъ геометріи идетъ и философская разработка того-же вопроса. Для насъ, какъ математиковъ, всего интереснѣе тѣ идеи, которыя высказываются Пуанкаре. Его идеи, изложенныя особенно подробно въ журналѣ *Monist* за 1898 (въ статьѣ: *On the foundations of geometry*), составляютъ развитіе и приложеніе къ ученію о пространствѣ общихъ началъ той научной философіи, которой часто придается названіе эмпириокритицизма. На вѣчный вопросъ „что есть истина“ это философское направленіе отвѣчаетъ признаніемъ невозможности достигнуть точнаго объясненія явленій, въ замѣну котораго наука даетъ систему символовъ, изображающихъ явленія міра. Та система символовъ истинна, которая болѣе удобна. Такъ по взглядамъ Пуанкаре система аксіомъ Евклида есть только наиболѣе удобная для изученія явленій перемѣщенія. Другое важное философское сочиненіе, появившееся въ послѣднее время по вопросу объ основаніяхъ геометріи, сочиненіе Russel'a стоитъ напротивъ на точкѣ зрѣнія Канта и интересная полемика между Русселемъ и Пуанкаре <sup>1)</sup> представляетъ весьма большой интересъ для философіи математики. Отмѣчу работы нѣкоторыхъ другихъ французскихъ математиковъ-философовъ (Lechalas, Calinon и др.) Вліяніе неевклидовой геометріи на пробужденіе вниманія къ вопросамъ философіи математики отразилось между прочимъ и на конгрессѣ философіи, имѣвшемъ мѣсто въ Парижѣ непосредственно передъ математичес-

---

<sup>1)</sup> *Revue de metaphysique et de morale*.

кимъ конгрессомъ. Кромѣ нѣсколькихъ сообщеній, посвященныхъ вопросамъ философіи пространства<sup>1)</sup>, сообщеніе Пуанкаре объ основныхъ началахъ механики было приложеніемъ къ вопросу объ основаніяхъ механики тѣхъ взглядовъ на сущность нашего познанія, которые были выработаны имъ по поводу неевклидовой геометріи.

Такъ развивается разработка неевклидовой геометріи и расширяется ея вліяніе. Пожелаемъ, чтобы премія Лобачевского могла всегда справедливо и своевременно отмѣчать важнѣйшіе успѣхи въ той области знанія, которая неразрывно связана съ именемъ нашего великаго ученаго.“

2. Секретарь Коммиссіи втораго присужденія преміи Н. И. Порфирьевъ прочиталъ отчетъ о исполненномъ порученіи. Премія въ 500 кред. рублей присуждена проф. Killing'у за мемуары и сочиненіе „Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Bd. I — II“. Почетный отзывъ на основаніи § 7 положенія о преміи присужденъ проф. A. N. Whitehead'у за мемуаръ и сочиненіе: „A treatise on universal Algebra with applications“. Почетный отзывъ на основаніи § 14 присужденъ проф. W. Binder'у за мемуары и сочиненіе: „Theorie der unicursalen Plancurven 4-er bis 3-er Ordnung in synthetischer Behandlung“. Золотыя медали присуждены рецензентамъ проф. Fr. Engel'ю и проф. К. А. Андрееву.

3. По предложенію Предсѣдателя постановлено послать проф. Killing'у, Engel'ю и Андрееву телеграммы о состоявшихся присужденіяхъ и благодарить членовъ Коммиссіи, принимавшихъ участіе въ разборѣ конкурсныхъ сочиненій<sup>2)</sup>.



---

<sup>1)</sup> Lechilus.

<sup>2)</sup> Физико-Математическаго Общества по поводу участія проф. R. Ball'я во 2-мъ присужденіи избрало его въ засѣданіи 18 ноября своимъ почетнымъ членомъ.

# ОТЧЕТЪ

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОБЩЕСТВУ ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

### Коммисіи 2-го присужденія преміи имени профессора Н. И. Лобачевского,

читанный въ засѣданіи Физико-Математическаго Общества  
22 октября 1900 года.

Согласно съ „Положеніемъ“ о преміи (§ 12) въ засѣданіи Ф. М. О. 13 ноября 1899 года предсѣдательствовавшимъ было доложено, что съ 22 октября 1896 года по 22 октября 1899 года (§ 11) на соисканіе преміи прислано четырьмя авторами свыше 14 сочиненій. Для разсмотрѣнія этихъ сочиненій (§ 12) и присужденія преміи (§ 14) Обществомъ составлена была въ томъ-же засѣданіи спеціальная Коммиссія изъ семи членовъ подъ предсѣдательствомъ Предсѣдателя Ф. М. Общества. Въ коммиссію вошли: Предсѣдатель Общества А. В. Васильевъ, профессора чистой математики Императорскаго Казанскаго Университета: Ѳ. М. Суворовъ и П. С. Назимовъ—безъ избранія (§ 12) и члены: профессора Д. А. Гольдгаммеръ, Д. И. Дубяго, Д. Н. Зейлигеръ и приватъ-доцентъ Н. И. Порфирьевъ по избранію.

Составленная коммиссія имѣла три засѣданія.

Въ *первомъ*, распорядительномъ засѣданіи 27 ноября 1899 года Коммиссія, признавъ необходимымъ годъ опубли-

кованія сочиненія приурочивать къ году выхода послѣдняго его вышедшаго тома, нашла возможнымъ принять на конкурсѣ всѣ присланные труды и намѣтила для каждыя рецензентовъ, на авторитетномъ мнѣніи которыхъ, выраженномъ въ письменномъ отзывѣ, должно будетъ основываться присужденіе преміи.

Во *второмъ засѣданіи*, 4 февраля 1900 г., Комmissiя обезпечила полученіе къ опредѣленному сроку необходимыхъ данныхъ для присужденія преміи. Здѣсь слѣдуетъ отмѣтить съ чувствомъ глубокой признательности, что профессоръ астрономіи и геометріи въ Кембриджскомъ университетѣ Робертъ Болль—несравненные труды котораго какъ математика и натуръ-философа получили уже всякую возможную оцѣнку во всемъ ученомъ мѣрѣ, не отказался прислать свое мнѣніе объ одномъ изъ конкурсныхъ сочиненій.

По истеченіи назначеннаго срока и по полученіи всѣхъ рецензій состоялось 16 октября 1900 года *третье засѣданіе* Комmissiи, на которомъ были заслушаны всѣ отзывы и обсуждены сравнительныя достоинства конкурсныхъ трудовъ. Комmissiя прежде всего пришла къ рѣшенію признать безспорныя преимущества *двухъ трудовъ*: труда профессора Кембр. Унив. *A. Whitehead'a* и труда проф. Мюнст. Акад. *W. Killing'a* предъ прочими сочиненіями. Рецензія о сочиненіяхъ *A. Whitehead'a*: 1) „A treatise on universal Algebra with applications. Vol. I.“ Cambridge 1898., и

2) „The Geodesic Geometry of Surfaces in non — Euclidean Space.“ (Extracted from the London Mathematical Society. Vol. XXIX, № 629—632, pg. 275—324) была поручена проф. R. Ball'ю.

Рецензія на сочиненія *W. Killing'a*: 1) „Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Bd. I—II. Paderborn. 1893—1898.“

2) „Ueber die Nicht - Euclidischen Raumformen von  $n$  Dimensionen. Braunsberg 1883“. „Die Nicht - Euclidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipz. 1885“. „Die Mechanik in den Nicht - Euclidischen Raumformen“. (Journ. f. reine u. angew. Math. Bd. 98). „Ueber die Grundlagen der Geometrie“. (J. f. r. u. angew. M. Bd. 109). „Die Zusammen-

setzungen d. stet. endl. Transformationsgruppen“ (Math. Ann. XXXI, XXXIII, XXXVI). Braunschweig. 1887—1889. „Bestimmung der grössten Untergruppen von endlichen Transformationen“. (Math. Ann. XXXVI). „Erweiterung des Begriffes des Invarianten von Transformationsgruppen“. (Math. Ann. XXXV). „Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen. (Math. Ann. XXXIX). „Zur projectiven Geometrie“. (Math. Ann. XLIII). „Ueber transfinite Zahlen“. Münster. 1896. (Math. Ann. поручена была проф. Лейпцигскаго Университета Fr. Engel'ю)

Эти рецензии выяснили, что если за первенство сочинения проф. Whitehead'a говорить оригинальность и связность точки зрения, широка эрудиция автора, превосходное исполнение плана сочинения с точки зрения систематичности и законченности, необыкновенная общность и приложимость метода, напр. в геометрии и динамике, то сочинение проф. Killing'a с первой до последней страницы представляет оправдание и обстоятельное развитие того круга идей, который разумеется под именем неевклидовой геометрии; что сочинение Killing'a есть первое и единственное в своем роде сочинение, в котором можно изучить важнейшие работы до 1898 года из области оснований геометрии, родственные же работы Killing'a по теории непрерывных групп преобразований, оказавшие такие услуги геометрии, выдаются столько-же по оригинальности метода, сколько и по красоте результатов. В Комиссии голоса присуждающие премию разделились поровну за пр. Whitehead'a и пр. Killing'a и на точном основании § 7 „Положения“ пришлось прибегнуть для присуждения премии к жребию. По жребию премия была присуждена проф. W. Killing'у, а проф. A. N. Whitehead'у был присужден по § 7 почетный отзыв.

*Третий конкурсный труд*, проф. Вирнерейштадтской высшей технической школы W. Binder'a: 1) „Theorie der unicursalen Plancurven 4-ter bis 3-ter Ordnung in synthetischer Behandlung. Leipz. 1896. I — XI + 392 + Tafeln I und II.

2) Семь мемуаров: „Realität d. Doppeltangenten ration.



Plancurv. etc.“ (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 35. Bnd.) „Absolute Elementensysteme etc.“ (Ztschr. f. Math. u. Phys. 36. Bnd.) „Neue Axenconstructionen etc.“ (Wr. Neustadt 1892) „Zur Theorie d. ebenen Tangentenvierecks“ (Ztschr. f. d. math. u. naturw. Unterr. 1893. 24 Jahrg.) „Plancurv. 4-ter Ordn. v. Geschlecht  $p=1$  etc.“ (Xenia austriaca 1893). „Die Undulationen ebener  $C_4^*$ “ (Sitz. Ber. d. kais. Akad. d. Wiss. in Wien, 1897. 56 Band.) „Die cotierte Darstellung auf einer Bildebene etc.“ (Wr. Neustadt. 1897).

былъ разобранъ профессоромъ Московскаго Университета К. А. Андреевымъ.

Главную особенность сочиненія проф. Binder'a составляетъ методъ, строго и исключительно синтетическій. Но рецензентъ причисляетъ автора не къ послѣдователямъ широкихъ воззрѣній Штейнера, а скорѣе къ послѣдователямъ Э. Вейра. Свойства кривыхъ 4 и въ частности 3 порядка получаются авторомъ путемъ такъ сказать геометрическаго синтеза свойствъ кривыхъ 2-го порядка, способомъ квадратичнаго преобразования и его частныхъ случаевъ. Авторъ не всегда прямо и не достаточно систематично идетъ по этому пути, преслѣдуя вѣроятно цѣли черченія кривыхъ, какъ о томъ можно думать по приложеннымъ чертежамъ, превосходно исполненнымъ и дающимъ для составленія понятія о природѣ кривыхъ болѣе, чѣмъ многія его отвлеченныя соотношенія и описанія. Не смотря на то, что въ общемъ книга проф. Binder'a представляетъ при большомъ конструктивномъ матеріалѣ мало плодотворныхъ научныхъ результатовъ, заслугой автора рецензентъ признаетъ уясненіе и установленіе въ наукѣ отчетливаго нагляднаго представленія о кривыхъ 4 — 3-го порядка, ближайшихъ по природѣ къ коническимъ сѣченіямъ.

На основаніи отзыва проф. Андреева Коммиссія присудила W. Binder'у почетный отзывъ.

*Четвертый конкурсный трудъ* Коммиссія, опираясь на отзывъ о немъ, не нашла возможнымъ признать достойнымъ присужденія почетнаго отзыва, какъ по сравненію съ другими конкурсными трудами, такъ и по существу.

Въ заключеніе Коммиссія постановила благодарить отъ

имени Физико-Математическаго Общества всѣхъ лицъ, принимавшихъ участіе въ рецензіяхъ и кромѣ того:

1) Принимая во вниманіе заслуги профессора *Fg. Engel'*а, такъ много способствовавшаго распространенію идей Лобачевскаго въ Германіи, въ благодарность за обстоятельный трудъ по критическому разбору обширныхъ сочиненій *W. Killing'*а, Коммиссія постановила на основаніи § 16 „Положенія“ присудить рецензенту *Fg. Engel'*ю установленную золотую медаль имени *Н. И. Лобачевскаго*.

2) Въ виду того, что проф. *К. А. Андреевъ* своей рецензіей оказалъ важное содѣйствіе Обществу, и во вниманіе къ заслугамъ рецензента въ разработкѣ проэтивной геометріи въ Россіи, Коммиссія присудила профессору *К. А. Андрееву* также золотую медаль, установленную для рецензентовъ.

Предсѣдатель Коммисіи *А. Васильевъ*.

Секретарь Коммисіи *Н. Порфирьевъ*.

Слѣдующее присужденіе преміи *Н. И. Лобачевскаго* послѣдуетъ 22 октября 1903 года. Конкурсныя сочиненія должны быть присланы въ Физико-Математическое Общество при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ къ 22 октября 1902 года.



**Отзывъ проф. Болля о математическихъ сочиненіяхъ A. N. Whitehead'a, проф. Кембриджскаго Trinity College.**

Важнѣйшее изъ сочиненій автора есть конечно его „Universal Algebra“, первый томъ котораго (8° pp. 566) изданъ Кембриджскою Университетскою типографіею въ 1898 г.

Эта замѣчательная книга должна оказать величайшія услуги изучающимъ алгебраическій символизмъ во всѣхъ его формахъ. Сочиненіе связывающее вмѣстѣ и показывающее истинныя взаимныя отношенія такихъ большихъ и важныхъ теорій какъ теорія кватерніоновъ и матрицъ, символическая логика и Ausdehnungslehre, Неевклидова геометрія и геометрія *n* измѣреній съ приложеніями въ теоріямъ системъ силъ и многіе другіе важные вопросы должно конечно, будучи законченнымъ, отмѣтить большой шагъ впередъ въ математической литературѣ. Мнѣ кажется, что Г. Уайтхедъ превосходно выполнилъ свой планъ. Онъ овладѣлъ обширною литературою предмета настолько успѣшно, что онъ, воспроизводя извѣстное, сумѣлъ придать въ то-же время единство многимъ теоріямъ и изложить ихъ весьма удобопонятно. Всюду онъ ввелъ новыя доказательства и представилъ предметъ съ свѣжихъ и поучительныхъ точекъ зрѣнія. Онъ распространилъ многія теоремы уже полученныя другими и въ то-же время своими собственными открытіями значительно способствовалъ дальнѣйшему развитію предмета.

Мнѣ невозможно входить въ подробности относительно содержанія сочиненія столь большаго по объему и столь значительнаго по интересу. Я предполагаю поэтому остановитъ-

книга III, части книги IV, книги V, VI и части книги VII. ся специально на успѣхахъ въ геометріи и на тѣхъ развитіяхъ, которыя представляютъ особенный интересъ для изучающаго динамику.

Части книги, специально относящіяся къ геометріи, суть

Книга III посвящена изученію проективной геометріи и измѣреній. Конечно многіе изъ результатовъ уже извѣстны и методы принадлежатъ Грассману. Но способъ изложенія предмета, какъ кажется, отмѣчаетъ большой успѣхъ впередъ. Онъ болѣе систематиченъ и болѣе законченъ чѣмъ изложеніе Грассмана. Какъ примѣръ новыхъ результатовъ въ этой части сочиненія я укажу на замѣчательное изслѣдованіе квадрическихъ геометрическихъ мѣстъ съ нулевымъ напряженіемъ на стр. 166.

Въ книгѣ V (главѣ III) методы близки къ методамъ Грассмана и это нельзя не одобрить т. е. методы такого великаго ученаго не заслуживаютъ иного отношенія. Однако я полагаю, что приложенія этихъ методовъ къ квадрикамъ, данное на стр. 210—212 настолько же ново, насколько оно несомнѣнно изящно и поучительно.

Въ книгѣ IV мы находимъ приложеніе „Ausdehnungslehre“ въ проективной геометріи; изъ многихъ новыхъ доказательствъ и выводовъ я отмѣчу тѣ которые касаются до косыхъ матрицъ, равно какъ цѣнное изученіе случая равныхъ корней (см. также гл. IV книги V).

Въ V Книгѣ я придаю большое значеніе изложенію чистыхъ Грассмановскихъ методовъ безъ употребленія формулъ метрической геометріи причемъ получаются многіе новые и весьма интересные результаты.

Нѣкоторые другіе писатели, которымъ конечно Г. Уайтхедъ отдаетъ должное, занимались уже изученіемъ неевклидовой геометріи съ помощью методовъ Грассмана, но систематическое и поучительное развитіе предмета, которое мы находимъ въ книгѣ VI, по моему мнѣнію такъ же ново, какъ и многіе изъ полученныхъ результатовъ. Совершенство методовъ употребляемыхъ Уайтхедомъ, какъ кажется, состоитъ въ слѣдующихъ двухъ главныхъ особенностяхъ:

1°. Онъ можетъ изучать геометрію и измѣреній посредствомъ тѣхъ-же самыхъ формулъ, которыя употребляются для двухъ и трехъ измѣреній. Этимъ, я думаю, онъ сдѣлалъ большой шагъ впередъ, причемъ методы употребляемые имъ, безъ сомнѣнія, столь-же просты и прекрасны какъ тѣ, которые употреблялись предыдущими изслѣдователями.

2°. Различные роды пространства: параболическаго, гиперболическаго и эллиптическаго (двухъ родовъ) представляются въ методѣ Уайтхеда совершенно естественно въ ходѣ изслѣдованія; они являются какъ единственныя альтернативы, когда сдѣланы извѣстныя допущенія. Сверхъ-того результаты изложены такъ, что для читателя легко развить для каждаго пространства свойства, найденныя для одного изъ нихъ.

Общая характеристика геометріи Уайтхеда, на которой какъ кажется нужно сдѣлать особенное удареніе въ виду цѣли отчета, главнымъ образомъ состоитъ въ большей общности его метода. Изложеніе предмета вполнѣ систематично; результатомъ этого является возможность на каждомъ шагѣ усмотрѣть логическія альтернативы и хотя вообще онъ не разрабатываетъ всѣхъ возможныхъ альтернативъ, онъ даетъ достаточныя указанія и иллюстрирующіе примѣры, которые вполнѣ достаточны для руководства читателя при изученіи другихъ интересныхъ случаевъ.

Въ книгѣ V о протяженныхъ многообразіяхъ трехъ измѣреній заключается теорія системъ силъ, составляющая важный вкладъ въ наши знанія. Примѣнимость методовъ „Ausdehnungslehre“ въ изученію силъ отлично иллюстрируется примѣрами и многими очень интересными приложеніями къ теоріи винтовъ. Въ теоріи группъ системъ силъ замѣчательныя приложенія теоріи ангармоническаго отношенія привели къ нѣкоторымъ расширеніямъ нашего знанія. Сжатость изложенія и его примѣнимость къ задачамъ можетъ быть изучена въ главѣ III объ инвариантахъ группъ.

Книга въ высочайшей степени заслуживаетъ вниманіе изучающихъ современные математическіе методы и составляетъ настолько большой шагъ впередъ, что она, по моему

мнѣнію, вполне достойна той важной преміи, по поводу присужденія которой составленъ этотъ докладъ.

Я не достаточно знакомъ съ другими сочиненіями Г. Уайтхеда, но его мемуаръ о геодезическихъ кривыхъ въ эллиптическомъ пространствѣ, какъ мнѣ кажется, указываетъ на большое умѣніе автора обращаться съ труднымъ математическимъ вопросомъ.

Я полагаю, что онъ весьма важенъ такъ-какъ геодезическія кривыя въ пространствѣ общаго типа были до сихъ поръ весьма мало изучены.

Робертъ Болль,  
Лоундеанскій профессоръ  
астрономіи и геометріи въ  
Кембриджскомъ Университетѣ.

Обсерваторія  
Кембриджъ  
30 Сент. 1900.



**Report on the mathematical work of Sir A. N. Whitehead, Fellow of Trinity College, Cambridge.**

The most important work is of course his „Universal Algebra“ of which the first volume (Large 8<sup>vo</sup> pp. 566) was published by the Cambridge University Press in 1898.

This remarkable volume is of the utmost service to the student of algebraic symbolism in all its forms. A work which brings together and shows in their true mutual relations such great and important theories as those of Quaternions and Matrices of Symbolic Logic and the Ausdehnungslehre of Non Euclidean Geometry and Geometry of  $n$ —dimensions, with applications to the theories of systems of forces and to many other important subjects must if well executed mark a great advance in mathematical literature.

It seems to me that Mr. Whiteheads scheme has been admirably carried out. He has mastered the extensive literature of the subject so successfully that he is able in reproducing what is already known to give unity to a number of theories and to treat them in a comprehensive manner. At every point he has introduced new proofs and presented the subject from fresh and instructive points of view. He has extended many theorems that had been already obtained by others while by his own discoveries he has largely contributed to the advance of the subject.

It would not be possible for me to enter into any minute detail as to the contents of a work so great in volume as well as in interest. I prefer therefore to allude specially to the advances in Geometry and to the developments which are of particular interest to the student of Dynamics.

Geodesics in the generalized space conceptions had been but little studied.

**Robert S. Ball**

Lowndean Professor of Astro-  
nomy and Geometry in the  
University of Cambridge.

Observatory  
Cambridge (Eng.)  
30 Sept., 1900.





**An die physiko-mathematische Gesellschaft bei  
der Kaiserlichen Universität Kasan.**

*Geehrte Herren!*

Zum zweiten Male soll der Lobatschefskijpreis verliehen werden und Sie haben mir den ehrenvollen Auftrag ertheilt, über eines der zur Bewerbung eingereichten Werke ein Gutachten abzugeben.

Es handelt sich um das Buch von W. Killing: „Einführung in die Grundlagen der Geometrie“, dessen erster Band 1893 und dessen zweiter 1898 erschienen ist.

Dass dieses Werk zu denen gehört, die nach den Statuten des Lobatschefskijpreises in Betracht kommen, liegt auf der Hand, denn es ist von der ersten bis zur letzten Seite eine Rechtfertigung und ausführliche Entwicklung des Kreises von Vorstellungen, den man unter dem Ausdrucke „nichteuclidische Geometrie“ zu verstehen pflegt. Allerdings könnte man ein formelles Bedenken geltend machen, denn nach § 6 der Statuten sollen die betreffenden Werke innerhalb sechs Jahren vor der Verleihung des Preises erschienen sein und da diesmalige Verleihung Anfang November 1900 stattfinden wird, so genügt der erste Band des Killingschen Werkes dieser Bedingung nicht. Aber ich glaube, man wird über dieses formelle Bedenken leicht hinwegkommen. Das Werk muss als Ganzes betrachtet werden und es ist daher in unserem Falle die Zeit massgebend, zu der der abschliessende, also der zweite Band erschienen ist.

Ich möchte sogar noch weiter gehen und den Grundsatz aufstellen, dass bei dem Urtheile über die Preiswürdigkeit ei-

nes Bewerbers nicht bloß das von ihm eingereichte Werk herbeizuziehen ist, sondern auch—ohne Rücksicht auf die Zeit ihrer Veröffentlichung—dessen sonstige Arbeiten, soweit sie mit dem Inhalte dieses Werkes in unmittelbarem Zusammenhange stehen oder nach irgend einer Richtung hin die in dem Werke dargestellten Untersuchungen in besonders hervorragender Weise weiterführen. Das scheint mir geradezu eine Pflicht der Gerechtigkeit gegen den Verfasser zu sein, denn es wird nicht selten vorkommen, daß die besonderen Zwecke, die dieser bei der Herausgabe seines Werkes verfolgte ihm nicht erlaubt haben, alle seine Untersuchungen auf dem betreffenden Gebiete aufzunehmen, so daß vielleicht gerade seine originellsten und tiefgehendsten Leistungen auf diesem Gebiete, die ihm den Vorrang vor seinen Mitbewerbern verleihen, ganz ausser Betracht bleiben, wenn man bloß auf Grund des eingereichten Werkes urteilt.

Ob Sie, geehrte Herren, diesen Grundsatz zu dem Ihrigen machen wollen oder können, wage ich nicht zu entscheiden, doch glaube ich, daß man in dem vorliegenden Falle nicht anders verfahren kann, ohne dem Bewerber Unrecht zu thun. Killing hat sein Werk als eine „Einführung“ bezeichnet. Darin liegt, daß es in erster Linie für solche bestimmt ist, die mit den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie noch wenig oder gar nicht vertraut sind und die sich darüber orientieren wollen, welche Fragen auf diesem Gebiete gestellt werden und was bisher zur Beantwortung dieser Fragen geleistet worden ist. Zugleich aber liegt darin, daß sich der Verfasser auf solche Dinge beschränkt hat, die unmittelbar zu dem Probleme der Grundlagen der Geometrie gehören, daß er aber auch von seinen eignen Untersuchungen nur die aufgenommen hat, die dieser Anforderung genügen. Nun hat aber Killing seinerzeit, als er den allgemeinsten Begriff einer Raumform zu entwickeln suchte, den Lieschen Begriff einer endlichen kontinuierlichen transitiven Gruppe selbständig wiedergefunden (s. sein Braunsberger Programm von 1884: „Erweiterung des Raumbegriffes“) und hat dann, als er mit Lies älteren Arbeiten bekannt geworden

war, die Theorie der Transformationsgruppen durch Untersuchungen bereichert, die sich ebenso sehr durch Originalität der Methode wie durch Schönheit der Ergebnisse auszeichnen. („Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen“, Math. Ann. Bd. 31, 33, 34, 36, 1880 — 90). Diese Untersuchungen Killings sind daher so recht eigentlich aus seiner Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie hervorgegangen und sind ein neuer Beweis dafür, wie fruchtbar die Beschäftigung mit diesem Probleme, dem Probleme Lobatschewskijs ist. Trotzdem hat Killing wegen des besondern Ziels, das er seinem Werke gesteckt hatte, seine Entdeckungen über die Zusammensetzung der Gruppen ganz unberücksichtigt gelassen und lassen müssen. Was er aus äussern Gründen unterlassen hat, das fühle ich mich verpflichtet, bei der vorliegenden Gelegenheit nachzuholen. Ich werde mich also nicht darauf beschränken, das von ihm eingereichte Werk zu besprechen, sondern werde auch versuchen, wenigstens seine hervorragendste Leistung für die Theorie der Zusammensetzung der Gruppen, nämlich seine Bestimmung aller Zusammensetzungen von einfachen Gruppen, in das rechte Licht zu setzen.

Durch seine uns hier beschäftigende „Einführung in die Grundlagen der Geometrie“ will Killing eine orientierende Zusammenstellung der bisher auf diesem Gebiete gewonnenen Resultate geben. Das Werk ist infolgedessen keine systematische Darstellung der Grundlagen der Geometrie, wie sie zum Beispiel Veronese in seinen „Fondamenti“ versucht hat, sondern es hat in erster Linie den Zweck, alle die verschiedenen Standpunkte, von denen aus man im Laufe der Zeit das Problem der Grundlagen der Geometrie betrachtet hat, darzulegen und alle die Fragen, die dabei aufgetaucht sind, von den verschiedensten Seiten her zu beleuchten und, soweit möglich, zu beantworten. Einen systematischen Aufbau der Grundlagen hat der Verfasser auch schon deshalb nicht gegeben, weil, wie er im Vorworte zum ersten Bande sagt, die Forschungen noch keineswegs zum Abschlusse gelangt waren und weil sich noch Lücken zeigten, die vorläufig nicht aus-

gefüllt werden konnten. Doch fügt er hinzu, „es seien bereits so viele Vorfragen erledigt, dass die endgültige Lösung für eine nicht zu ferne Zeit erwartet werden müsse. Diese 1893 geschriebenen Worte haben inzwischen in allerneuester Zeit (1899) durch Hilberts Untersuchungen nach vielen Richtungen hin eine höchst merkwürdige Bestätigung gefunden. Jedenfalls ist das Killingsche Werk das erste in seiner Art und das einzige, in dem man sich über die wichtigsten vor 1898 erschienenen Arbeiten auf dem Gebiete der Grundlagen der Geometrie unterrichten kann. Aber der Verfasser, der schon seit vielen Jahren selbst als Forscher und Entdecker auf diesem Gebiete gearbeitet hat, bringt in dem Werke auch eine ganz beträchtliche Anzahl eigner Untersuchungen und Ergebnisse; diesen, sowie der geistigen Arbeit, die der Verfasser auf die Durchdringung und kritische Darstellung der Leistungen anderer verwendet hat, wird niemand seine Anerkennung versagen können, selbst wenn man im Einzelnen Manches anders dargestellt und Manches bloß angedeutete wirklich ausgeführt zu sehen wünscht. Dass sich der Verfasser auf philosophische Spekulationen grundsätzlich nicht eingelassen hat, muss man ihm als besonderes Verdienst anrechnen.

Von dem Inhalte des Werks eine genaue Vorstellung zu geben, ist nicht leicht. Ich begnüge mich daher mit einigen Andeutungen.

Der erste Abschnitt: „Berechtigung der nichteuklidischen Raumformen“ zeigt die verschiedenen Wege, auf denen man zu diesen Raumformen gelangen kann: indem man die Euklidische Parallelentheorie vervollständigt, indem man von der Geometrie auf den Flächen konstanter Krümmung ausgeht oder endlich, indem man die projektiven Verschiebungen einer Kreisfläche in sich betrachtet. Sodann werden die neben der Euklidischen möglichen Geometrien, die Lobatschewskij-Bolyaische, die Riemannsche und die elliptische jede für sich in Euklidischer Weise bis zu einem gewissen Grade entwickelt, wobei die geometrischen Axiome für die ganze Ausdehnung des Raums als gültig vorausgesetzt werden. Die Art der Entwicklung ist zu einen grossen Thei-

le Eigenthum des Verfassers, auch darf nicht vergessen werden, dass er der erste gewesen ist, der (1879 Crelles Journal Bd. 83) den Unterschied zwischen dem Riemannschen und dem elliptischen Raume (wie er ihn nennt, der Polarform des Riemannschen) klargestellt hat. Hierauf folgen noch zwei verschiedene Methoden zu einer gemeinsamen Begründung der verschiedenen Raumformen, wobei blos ein endliches Gebiet des Raumes vorausgesetzt und der Satz benutzt wird, dass im unendlichkleinen die Euklidische Geometrie gilt; durch Integration werden die Formeln der Trigonometrie gewonnen in denen eine Konstante  $K^2$ , das Riemannsche Krümmungsmass des betreffenden Raumes auftritt. Die erste Art der Begründung ist aus dem 1885 erschienenen Buche Killings: „Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung“ wiederholt. Die zweite ist neu.

Der zweite Abschnitt behandelt die projektive Geometrie und die darauf begründete Definition der metrischen Begriffe und der verschiedenen nichteuklidischen Raumformen. Ohne auf die mannigfachen Fragen einzugehen, die bei der Begründung der projektiven Geometrie auftreten, zeigt Killing, wie man mit Hülfe von Doppelverhältnissen Koordinaten einführen kann und bedient sich dann der Rechnung.

Was hier aus Zweckmässigkeitsgründen unterlassen ist, holt der sechste Abschnitt (in Bd. II) in ausgiebiger Weise nach. Hier wird die projektive Geometrie aufgebaut unter der Voraussetzung, dass nur ein allseitig begränzter Theil des Raums gegeben ist, dass aber in diesem Theile die nöthigen Axiome über Gerade und Ebene ausnahmelos erfüllt sind. Der Aufbau selbst geschieht durch Einführung idealer Elemente. Nunmehr werden die verschiedenen Möglichkeiten untersucht, die eintreten können, wenn man den projektiven Raum als Ganzes betrachtet, und zwar in der Weise, dass der ursprünglich gegebene Raumtheil auf einen Staудtschen projektiven Raum kollinear abgebildet wird. Hierauf folgt eine neue Begründung der Metrik, bei der die Gruppentheorie, allerdings unter Beschränkung auf projektive Gruppen, benutzt wird.

nes Bewerbers nicht bloß das von ihm eingereichte Werk herbeizuziehen ist, sondern auch—ohne Rücksicht auf die Zeit ihrer Veröffentlichung—dessen sonstige Arbeiten, soweit sie mit dem Inhalte dieses Werkes in unmittelbarem Zusammenhange stehen oder nach irgend einer Richtung hin die in dem Werke dargestellten Untersuchungen in besonders hervorragender Weise weiterführen. Das scheint mir geradezu eine Pflicht der Gerechtigkeit gegen den Verfasser zu sein, denn es wird nicht selten vorkommen, daß die besonderen Zwecke, die dieser bei der Herausgabe seines Werkes verfolgte ihm nicht erlaubt haben, alle seine Untersuchungen auf dem betreffenden Gebiete aufzunehmen, so daß vielleicht gerade seine originellsten und tiefgehendsten Leistungen auf diesem Gebiete, die ihm den Vorrang vor seinen Mitbewerbern verleihen, ganz ausser Betracht bleiben, wenn man bloß auf Grund des eingereichten Werkes urteilt.

Ob Sie, geehrte Herren, diesen Grundsatz zu dem Ihrigen machen wollen oder können, wage ich nicht zu entscheiden, doch glaube ich, daß man in dem vorliegenden Falle nicht anders verfahren kann, ohne dem Bewerber Unrecht zu thun. Killing hat sein Werk als eine „Einführung“ bezeichnet. Darin liegt, daß es in erster Linie für solche bestimmt ist, die mit den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie noch wenig oder gar nicht vertraut sind und die sich darüber orientiren wollen, welche Fragen auf diesem Gebiete gestellt werden und was bisher zur Beantwortung dieser Fragen geleistet worden ist. Zugleich aber liegt darin, daß sich der Verfasser auf solche Dinge beschränkt hat, die unmittelbar zu dem Probleme der Grundlagen der Geometrie gehören, daß er aber auch von seinen eignen Untersuchungen nur die aufgenommen hat, die dieser Anforderung genügen. Nun hat aber Killing seinerzeit, als er den allgemeinsten Begriff einer Raumform zu entwickeln suchte, den Lieschen Begriff einer endlichen kontinuierlichen transitiven Gruppe selbständig wiedergefunden (s. sein Braunsberger Programm von 1884: „Erweiterung des Raumbegriffes“) und hat dann, als er mit Lies älteren Arbeiten bekannt geworden

war, die Theorie der Transformationsgruppen durch Untersuchungen bereichert, die sich ebenso sehr durch Originalität der Methode wie durch Schönheit der Ergebnisse auszeichnen. („Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen“, Math. Ann. Bd. 31, 33, 34, 36, 1880 — 90). Diese Untersuchungen Killings sind daher so recht eigentlich aus seiner Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie hervorgegangen und sind ein neuer Beweis dafür, wie fruchtbar die Beschäftigung mit diesem Probleme, dem Probleme Lobatschefskijs ist. Trotzdem hat Killing wegen des besondern Ziels, das er seinem Werke gesteckt hatte, seine Entdeckungen über die Zusammensetzung der Gruppen ganz unberücksichtigt gelassen und lassen müssen. Was er aus äussern Gründen unterlassen hat, das fühle ich mich verpflichtet, bei der vorliegenden Gelegenheit nachzuholen. Ich werde mich also nicht darauf beschränken, das von ihm eingereichte Werk zu besprechen, sondern werde auch versuchen, wenigstens seine hervorragendste Leistung für die Theorie der Zusammensetzung der Gruppen, nämlich seine Bestimmung aller Zusammensetzungen von einfachen Gruppen, in das rechte Licht zu setzen.

Durch seine uns hier beschäftigende „Einführung in die Grundlagen der Geometrie“ will Killing eine orientierende Zusammenstellung der bisher auf diesem Gebiete gewonnenen Resultate geben. Das Werk ist infolgedessen keine systematische Darstellung der Grundlagen der Geometrie, wie sie zum Beispiel Veronese in seinen „Fondamenti“ versucht hat, sondern es hat in erster Linie den Zweck, alle die verschiedenen Standpunkte, von denen aus man im Laufe der Zeit das Problem der Grundlagen der Geometrie betrachtet hat, darzulegen und alle die Fragen, die dabei aufgetaucht sind, von den verschiedensten Seiten her zu beleuchten und, soweit möglich, zu beantworten. Einen systematischen Aufbau der Grundlagen hat der Verfasser auch schon deshalb nicht gegeben, weil, wie er im Vorworte zum ersten Bande sagt, die Forschungen noch keineswegs zum Abschlusse gelangt waren und weil sich noch Lücken zeigten, die vorläufig nicht aus-

Der dritte Abschnitt ist dem mehrdimensionalen Raume gewidmet. Die von G. Cantor und von Peano herrührenden Abbildungen der Punkte eines Quadrats auf die Punkte einer Strecke geben Veranlassung zu einer Besprechung des allgemeinen Dimensionsbegriffs. Sodann wird gezeigt, wie Geometrie und Analysis beide gleichmässig darauf hindeuten, die dreifachausgedehnte Mannigfaltigkeit, die unser Erfahrungsraum bildet, zu erweitern und den Begriff des mehrfachausgedehnten Raumes einzuführen. Das wird bewerkstelligt, indem die projektive, die euklidische und die nicht-euklidischen Geometrien der Reihe nach analytisch auf Räume von mehr Dimensionen übertragen werden. Hierauf folgt auf Grund der Untersuchungen von Riemann, Lipschitz und Christoffel die Betrachtung der  $n$ -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, die quadratisches Bogenelement haben und die wenn sie konstantes Riemannsches Krümmungsmass haben, wieder auf die früher besprochenen Raumformen führen. Ferner wird noch gezeigt, wie man die zunächst bloß analytisch ausgedrückten Sätze und Beweise der Geometrie eines  $n$ -fach ausgedehnten Raumes in ein geometrischen Gewand kleiden kann, was aus pädagogischen Rücksichten für den vierfach ausgedehnten Raum noch besonders durchgeführt wird; dazu kommt eine ausführliche Untersuchung über die Polyeder im  $n$ -dimensionalen Raume. Den Schluss bildet eine nochmalige Rechtfertigung des Operirens mit mehrfach ausgedehnten Räumen.

Der vierte Abschnitt behandelt die Clifford-Kleinschen Raumformen, an deren Erforschung der Verfasser selbst hervorragenden Antheil genommen hat (durch eine Arbeit in Bd. 39 der mathematischen Annalen, 1891). Die grosse Wichtigkeit dieser Raumformen beruht darauf, dass sie besonders deutlich zeigen, welchen gewaltigen Unterschied es macht, ob man die geometrischen Axiome von vornherein für den ganzen Raum oder bloß für einen allseitig begrenzten Theil des Raumes als gültig annimmt. Im ersten Falle erhält man ausser der Euklidischen nur die drei früher erwähnten nicht-euklidischen Raumformen. Im zweiten Falle kommt noch eine zur



Zeit noch nicht übersehbare Mannigfaltigkeit verschiedener Raumformen hinzu. Während der erste Band des Killingschen Werkes zeigt, wie man auf Grund gewisser Voraussetzungen die verschiedenen Raumformen entwickeln kann, ist der zweite Band der Aufgabe gewidmet, die Berechtigung und das Wesen dieser Voraussetzungen nach den verschiedensten Seiten hin zu prüfen. Er behandelt daher Fragen, die noch immer im Flusse sind. Höchstens bei der projektiven Geometrie und bei ihren Beziehungen zur Metrik—davon handelt der schon früher erwähnte sechste Abschnitt—kann man wenigstens in gewissem Sinne sagen, dass schon eine Art von Abschluss erreicht ist.

Der fünfte Abschnitt: „Kongruenz und Messung“ bespricht und kritisirt die Grössensätze und die Bewegung bei Euklid, sowie den Versuch Riemanns, die Geometrie auf den Begriff des Bogenelementes zu begründen. Hierauf folgt eine ausführliche Darstellung der neueren Untersuchungen über die Messbarkeit und die Messung der Linien, Flächen und Körper. Endlich giebt die Behandlung der Stetigkeit und des Verhältnissbegriffes bei Euklid Veranlassung, das sogenannte Archimedische Axiom näher zu untersuchen. Es werden infolgedessen die verschiedenen Erweiterungen besprochen, die das Zahlengebiet durch Einführung transfiniter Zahlen erfahren hat, nämlich die Cantorsche und die Veroneseschen transfiniten Zahlen und eine vom Verfasser selbst 1895 angegebene Erweiterung dieser Art.

Auf den schon charakterisirten sechsten Abschnitt folgt der siebente: „Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie.“ Dieser ist zunächst kritisch gehalten und bespricht eine grosse Reihe von Versuchen, die gemacht worden sind, um eine befriedigende Definition der Geraden, der Ebene und der andern geometrischen Grundbegriffe zu erhalten. An diesen kritischen Theil schliesst der Verfasser einen eignen Versuch, ein System von Grundbegriffen und Grundsätzen der Geometrie aufzustellen, ohne jedoch den Anspruch zu erheben, dass dieses System wirklich hinreicht, um alle Geometrien aufzubauen, für die es gültig ist. Doch zeigt sich jedenfalls, dass

es ausser den früher betrachteten noch eine unbegranzte Anzahl von andern Raumformen giebt, die jenem Systeme von Grundbegriffen und Grundsätzen genügen und diese bezeichnet Killing als Raumformen im allgemeinsten Sinne.

Einen Weg zur Behandlung solcher Raumformen eröffnet die Liesche Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen, mit deren Anwendung sich der achte und letzte Abschnitt beschäftigt. Nach einem Ueberblicke über Lies Gruppentheorie untersucht Killing ausführlicher die transitiven Gruppen von Punkttransformationen des  $R_3$ , bei denen zwei unendlich benachbarte Punkte eine und nur eine Invariante haben. Nunmehr wird der Zusammenhang zwischen den allgemeinsten Raumformen und den Transformationsgruppen auseinandergesetzt. Durch Betrachtungen, die Killing schon 1884 in dem Programme „Erweiterung des Raumbegriffs“ entwickelt hatte, gelingt es ihm, unter gewissen Voraussetzungen die Punkte einer allgemeinen Raumform durch Koordinaten zu bestimmen, und nachdem das geschehen, stellt sich heraus, dass die allgemeinen Raumformen, für die das möglich ist, bei denen also der Raum als Zahlenmannigfaltigkeit betrachtet werden kann, transitive Transformationsgruppen im Sinne Lies repräsentiren. Jetzt folgt eine Besprechung der berühmten Helmholtzschen Arbeit: „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“ und der Untersuchungen von Lie, die ja ursprünglich durch das Bestreben veranlasst waren, die Helmholtzschen Entwicklungen mit den Hilfsmitteln der Gruppentheorie zu prüfen und zu berichtigen. Endlich stellt Killing seinerseits ein System von Axiomen auf, das ähnlich wie die beiden von Lie aufgestellten Systeme genügt, um unter allen möglichen Raumformen die Euklidische, die Lobatschefskische und die elliptische auszuscheiden, das sich aber der Erfahrung näher anschliesst als jene Lieschen. Beim Beweise stützt er sich auf die früher von ihm durchgeführte gruppentheoretische Untersuchung.

Die gegebene, nur allzu knappe Uebersicht über das Kil-

lingsche Werk lässt zur Genüge erkennen, dass dieses das Problem der Grundlagen der Geometrie in der vielseitigsten Weise behandelt.

Als der erste Versuch, alle die verschiedenen Fragen, die sich an das genannte Problem geknüpft haben, im Zusammenhange zu beleuchten und alle die Hilfsmittel zu sammeln, die zahlreiche Mathematiker und nicht zum wenigsten der Verfasser selbst zur Erledigung des Problems geschaffen haben, wird das Werk auf lange hinaus seinen Werth behalten, wenn auch die Darstellung hie und da an Schärfe und Klarheit zu wünschen übrig lässt. Dass gerade die Grundlagen der Geometrie seit dem Erscheinen des Werkes durch Hilbert in ganz ungeahnter Weise gefördert worden sind, kann Killings Verdienst nicht schmälern. Sein Werk bleibt jedenfalls noch lange das beste Hilfsmittel, um sich über die bis 1898 erschienenen Untersuchungen auf diesem Gebiete zu orientiren, für alle, die nicht in der Lage sind—und wer wäre das—die zahllosen Originalarbeiten selber zu studiren; es enthält ausserdem so viele eigne Untersuchungen des Verfassers, dass es seinen Werth behalten wird, auch wenn es als zusammenfassendes Werk durch andre Darstellungen überholt sein wird.

Aber, wie ich schon im Eingange erwähnt habe, wer blos das eben besprochene Werk Killings kennt, kennt noch nicht die originellste und weittragendste Leistung, zu der Killing durch seine Untersuchungen auf dem Gebiete der Grundlagen der Geometrie geführt worden ist, denn die Aufgabe, die sich Killing bei seinem Werke gestellt hatte, erlaubte ihm nicht, seine Untersuchungen über die Zusammensetzung der endlichen kontinuierlichen Gruppen mit aufzunehmen, obgleich diese so recht eigentlich aus seiner Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie hervorgewachsen und offenbar ursprünglich zu dem Zwecke unternommen sind, möglichst tief in die gruppentheoretische Seite des ganzen Problems einzudringen. Ich halte mich daher aus den früher erwähnten Gründen für verpflichtet, auch noch über diese Killingschen Untersuchungen Einiges zu sagen, beschränke mich jedoch

dabei auf das, was Killing für die Theorie der einfachen Gruppen geleistet hat.

Lie hatte gezeigt, dass  $r$  unabhängige infinitesimale Transformationen dann und nur dann eine  $r$ —gliedrige Gruppe erzeugen, wenn sie in Beziehungen von der Form:

$$X_i X_k = \sum_s^{1 \dots r} c_{iks} X_s \quad (i, k = 1 \dots r)$$

stehen. Das System der Konstanten  $c_{iks}$  nannte er die Zusammensetzung der Gruppe und bewies, dass die Bestimmung aller  $r$ —gliedrigen Zusammensetzungen ein algebraisches Problem ist, denn die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass  $r^3$  Konstanten  $c_{iks}$  eine solche Zusammensetzung darstellen ist das Bestehen der Relationen:

$$\begin{aligned} c_{iks} + c_{kis} &= 0 \\ \sum_v^{1 \dots r} (c_{ikv} c_{vjs} + c_{kjl} c_{vis} + c_{jiv} c_{vks}) &= 0 \\ (i, k, j, s &= 1 \dots r) \end{aligned}$$

Dieses algebraische Problem in voller Allgemeinheit direkt anzugreifen, war keine Aufgabe nach Lies Sinn, er hatte es daher nur für kleine Werthe von  $r$  ( $r \leq 7$ ) vollständig gelöst und hatte andererseits durch seine Bestimmung der Gruppen der Ebene und des Raums und gewisser Gruppen des Raums von beliebig vielen Dimensionen zahlreiche Zusammensetzungen von Gruppen gefunden, insbesondere hatte er gezeigt, dass es drei Kategorien von einfachen Gruppen giebt, also von solchen, die keine invariante Untergruppe enthalten, nämlich die allgemeine projektive Gruppe des  $R_n$ , die projektive Gruppe einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades im  $R_n$  ( $n \neq 3$ ) und endlich die projektive Gruppe eines linearen Komplexes im  $R_{2n+1}$ .

Bei seinen Untersuchungen über Zusammensetzung stellte sich nun Killing unter anderm die Aufgabe, überhaupt alle Zusammensetzungen einfacher Gruppen zu bestimmen, eine Aufgabe, deren ungeheure Wichtigkeit für die Gruppentheorie an sich, namentlich aber für die Integrationstheorie

auf der Hand liegt, auf deren Lösbarkeit aber von vornherein kaum zu hoffen war, und er hat diese Aufgabe vollständig gelöst. Er gelangte zu dem höchst überraschenden Ergebnisse, dass es ausser den von Lie angegebenen Kategorien, deren jede unendlich viele einfache Gruppen umfasst, nur noch eine endliche, ziemlich kleine Zahl von einfachen Gruppen giebt, lauter Gruppen, die vor Killing ganz unbekannt waren. Dieses Ergebniss allein ist von der allerhöchsten Bedeutung, noch mehr sind es aber die ebenso originellen wie fruchtbaren Methoden, durch die Killing dazu gelangt ist. Es kann dabei nicht ins Gewicht fallen, dass der Beweis, den Killing für sein Resultat gegeben hat (Math. Ann. Bd. 33) nicht ganz lückenlos war, denn das Resultat selbst ist später durch die Untersuchungen von Cartan in seiner These (Paris 1894) bestätigt werden und der Weg, den Cartan dabei eingeschlagen hat, ist in allen wesentlichen Punkten der von Killing vorgezeichnete. Deshalb wird dieser Satz über die einfachen Gruppen unzertrennlich mit Killings Namen verknüpft bleiben.

Die Methode nun, deren sich Killing bedient hat, besteht in der systematischen Untersuchung der schon von Lie vielfach benutzten charakteristischen Gleichung:

$$\left| \begin{array}{c} 1 \dots r \\ \sum_s c_{sik} u_s - \varepsilon_{ik} \omega \end{array} \right| = 0$$

$$(i, k=1 \dots r)$$

die zur Bestimmung aller zweigliedrigen Untergruppen dient, denen die eingliedrige Gruppe  $\Sigma u, X, f$  innerhalb der Gruppe  $X_1 f \dots X_r f$  angehört. Er studirt die Beziehungen, die für ein Werthsystem  $u_1 \dots u_r$  von allgemeiner Lage zwischen den nicht verschwindenden Wurzeln dieser Gleichung für  $\omega$  bestehen. Da zeigt sich, dass bei einer einfachen Gruppe alle Wurzeln der Gleichung aus einer gewissen Zahl unter ihnen, etwa aus  $l$  in der Form  $m_1 \omega_1 + \dots + m_l \omega_l$  abgeleitet werden können, wo die  $m_k$  ganze Zahlen mit Einschluss der Null sind. Es giebt ferner eine ganzzahlige Substitution:

$$m'_k = \sum_i^{1\dots l} b_{ki} m_i \quad (k=1\dots l)$$

von solcher Beschaffenheit, dass jedesmal, wenn  $\Sigma m_k \omega_k$  eine Wurzel ist, auch  $\Sigma m'_k \omega_k$  eine wird. Da nun die Zahl der Wurzeln endlich ist, so muss diese lineare Substitution nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen zur Identität führen. Auf diese Eigenschaft gestützt gelingt es Killing, alle die Formen zu bestimmen, die das System der Wurzeln bei einer einfachen Gruppe haben kann, und nunmehr ist er auch im Stande, die möglichen Zusammensetzungen selbst zu finden. Die ganze Untersuchung ist ebenso originell wie schön; dass es Killing gelungen ist, alle die Schwierigkeiten zu überwinden, die die Durchführung im Einzelnen darbot, ist eine Leistung, die man nicht hoch genug schätzen kann und die schon für sich allein verdient, durch die Verleihung eines Preises ausgezeichnet zu werden.

Leipzig im Oktober 1900.

Friedrich Engel.



**Отзывъ о сочиненіи проф. W. Binder'a „ Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung“. (Leipzig 1896. p. 396 in 8°).**

Книга проф. Binder'a является, по его собственному замѣчанію, собраніемъ нѣсколькихъ статей и изслѣдованій, частію опубликованныхъ ранѣе имъ самимъ, частію же принадлежащихъ другимъ ученымъ. Ея предметъ кривыя, извѣстныя подъ названіемъ уникурсальныхъ или раціональныхъ, порядка не выше четвертаго. Методъ характеризуется авторомъ, какъ строго и исключительно синтетическій. Книга состоитъ изъ трехъ частей: общаго введенія и двухъ отдѣловъ, посвященныхъ послѣдовательно кривымъ 4-го и 3-го порядка.

Введеніе имѣетъ цѣлю указать тѣ точки отправленія, отъ которыхъ авторъ исходитъ, и тѣ орудія, которыми онъ пользуется.

Вначалѣ, подъ заглавіемъ „Основныя свойства общихъ плоскихъ кривыхъ“, собраны указанія, составляющія частію только опредѣленія, т. е. установленіе связи между понятіемъ и терминомъ, частію же отмѣчающія дѣйствительныя свойства плоскихъ линій, какъ общія такъ и частнаго характера. Къ такимъ свойствамъ относятся: опредѣляемость извѣстнымъ числомъ элементовъ, способность обладать особенными элементами и зависимости между числами этихъ элементовъ. Послѣднія, какъ извѣстно, всего полнѣе выражаются формулами Плюкера, о которыхъ, къ сожалѣнію, у автора вовсе нѣтъ упоминанія. Путемъ какихъ соображеній свойства эти стано-

вятся известными, авторъ также не указываетъ, а, между тѣмъ, это весьма важно въ виду того, что главную особенность всей книги составляетъ методъ и, слѣдовательно, для читающаго не безразлично, соответствуетъ ли установленіе данныхъ, отъ которыхъ авторъ начинаетъ, методу дальнѣйшаго слѣдованія по избранному имъ пути.

Предполагая геометрическую теорію коническихъ сѣченій известною, авторъ входитъ въ нѣкоторыя поясненія о пучкахъ и связкахъ этихъ кривыхъ. При этомъ имъ даются сперва геометрическія опредѣленія пучковъ и связокъ, какъ съ дѣйствительными такъ и съ мнимыми основными элементами. Изъ свойствъ этихъ системъ упоминается только о значеніи общаго вписаннаго или описаннаго полнаго четырехугольника и объ инволюціяхъ точекъ пересѣченія съ данною прямою или касательныхъ изъ данной точки. Особенныя указанія дѣлаются на отношенія къ бесконечно удаленной прямой. При этомъ, между прочимъ, утверждается, что если въ числѣ кривыхъ, составляющихъ пучекъ или связку, двѣ суть круги, то и всѣ остальные суть круги. Это утвержденіе не вѣрно для связки (Curvenschaar). Утвержденіе, что во всякомъ пучкѣ или связкѣ существуетъ, по крайней мѣрѣ, одна равносторонняя гипербола, также должно быть понимаемо условно, такъ какъ нахожденіе равносторонней гиперболы по даннымъ четыремъ касательнымъ (связка) есть задача 2-го порядка и можетъ имѣть мнимое рѣшеніе.

Дальнѣйшую группу основоположеній составляютъ свѣдѣнія о многозначныхъ соотвѣтствіяхъ. Во введеніи даются общія понятія о многозначномъ соотвѣтствіи, о двойныхъ и сдвоенныхъ элементахъ и о элементахъ развѣтвленія. Затѣмъ опредѣляется дирекціонная кривая. Это понятіе введено, если не ошибаемся, Эмилемъ Вейромъ и иногда оказывается полезнымъ при конструктивных доказательствахъ. Изъ соотношеній, опредѣляющихъ числа нѣкоторыхъ особыхъ элементовъ и дающихся авторомъ безъ доказательства, выводятся порядокъ и классъ дирекціонной кривой. Наконецъ дается опредѣленіе инволюціонной кривой, т. е. линіи, огибаемой прямыми, которыя соединяютъ всѣми возможными способами



точки инволюціонной группы для инволюціи  $n$ -го порядка на коническомъ сѣченіи. Оказывается, что это линія  $(n-1)$ -го класса и  $(n-1)(n-2)$ -го порядка.

Указанія на многозначныя соотвѣтствія необходимы автору для опредѣленія кривыхъ, какъ образуемыхъ элементарными формами, т. е. пучками прямыхъ линій и рядами точекъ. О свойствахъ кривыхъ, получающихся такимъ образованіемъ, даются также общія заключенія.

Важнѣйшее значеніе для всей книги имѣетъ такъ называемое квадратичное преобразование (*quadratische Transformation*), которому и отведено значительное мѣсто во введеніи.

Теорія квадратичнаго преобразованія хорошо разработана какъ въ геометрическомъ, такъ и въ аналитическомъ отношеніи. Особенныя заслуги въ развитіи этого ученія въ геометрическомъ направленіи принадлежатъ итальянскому геометру Кремона. Такъ какъ универсальныя или раціональныя кривыя 4-го порядка суть тѣ, которыя получаютъ такимъ преобразованіемъ изъ коническихъ сѣченій, то естественно, что всѣ ихъ свойства могутъ быть выведены путемъ, такъ сказать, геометрическаго синтеза, свойствъ кривыхъ 2-го порядка и свойствъ самого преобразованія, и это едва ли не самый правильный и самый кратчайшій путь къ цѣлямъ автора. Слѣдуя по этому пути, нужно только доказать предварительно, что, какимъ бы образованіемъ или опредѣленіемъ рассматриваемыя кривыя ни давались, онѣ будутъ не что иное, какъ квадратично-преобразованныя коническія сѣченія, и затѣмъ все дальнѣйшее изложеніе предмета представить въ видѣ систематическаго проведенія вышеназваннаго синтеза. При этомъ, конечно, въ цѣляхъ простѣйшаго достиженія вычерчиванія кривыхъ и, чрезъ то, составленія яснаго представленія о видимыхъ ихъ формахъ, могли бы быть употребляемы частныя виды преобразованія при условіи, чтобы этимъ не нарушалась общность самыхъ кривыхъ. Авторъ, какъ увидимъ ниже, дѣйствительно идетъ этимъ путемъ, но не вполне прямолинейно и недостаточно систематично.

Въ главѣ введенія, посвященной квадратичному преобразованію, дается прежде всего геометрическое опредѣленіе такого преобразованія по Штейнеру, т. е. изъ полярнаго соотвѣтствія между точками и прямыми линіями плоскости. Этимъ устанавливается квадратичное соотвѣтствіе между точками одной и той же плоскости и, притомъ, съ условіемъ совпаденія главныхъ точекъ. Примѣненіе же къ одной изъ соотвѣтственныхъ системъ коллинеаціи или линейнаго преобразованія приводитъ затѣмъ къ соотвѣтствію самаго общаго вида.

Спеціальнѣйшій видъ квадратичнаго преобразованія, который авторъ выбираетъ для своего изслѣдованія, есть тотъ, когда соотвѣтствіе устанавливается между элементами одной и той же плоскости и, притомъ, такъ, что двѣ изъ четырехъ двойныхъ точекъ суть такъ называемыя циклическія бесконечно удаленныя точки. Цѣль такого выбора понятна: многія изъ коническихъ сѣченій, которыми приходится пользоваться при построеніи, какъ вспомогательными, будутъ въ этомъ случаѣ кругами. Особенно важная роль въ изложеніи автора принадлежитъ кругу, проходящему черезъ главные точки и называемому поэтому главнымъ кругомъ (Hauptkreis). Точки этого круга соотвѣтствуютъ бесконечно удаленнымъ точкамъ. Треугольники, образуемые главными точками обѣихъ соотвѣтственныхъ системъ, будутъ необходимо подобными и въ частности могутъ предполагаться равными. Допуская послѣднее, авторъ принимаетъ сверхъ того, что обѣ системы совмѣщены въ одной плоскости такъ, что ихъ главные круги совпадаютъ, а треугольники, образуемые главными точками, имѣя одну общую сторону, симметрично между собою расположены. Всѣ эти ограниченія, безъ сомнѣнія, допустимы, такъ какъ ими не нарушается общность результатовъ; но, тѣмъ не менѣе, они лишаютъ общности самое изслѣдованіе и для теоретическихъ выводовъ вовсе не существенны. Выгода отъ выбора указаннаго частнаго случая квадратичнаго преобразованія получается по нашему мнѣнію только для техники черченія и для воспроизведенія путемъ послѣдняго конкретныхъ формъ изучаемыхъ кривыхъ. Въ теоретическомъ же отношеніи этому выбору

нельзя придавать большого значенія; можно даже видѣть въ немъ ненужное обремененіе воображенія и памяти размышляющаго побочными обстоятельствами, не имѣющими никакого вліянія на существо дѣла.

Въ видахъ примѣненія въ нѣкоторымъ особеннымъ кривымъ 4-го порядка, авторомъ обращается вниманіе еще на тѣ частные случаи, когда двѣ вершины какъ того, такъ и другого главнаго треугольника сливаются и когда, слѣдовательно, одна изъ сторонъ этого треугольника изъ хорды главнаго круга превращается въ касательную. Эта спеціализація не лишена также и теоретическаго значенія.

Инверсія или обобщенное преобразование обратныхъ радіусовъ есть, какъ извѣстно, частный видъ квадратичнаго соотвѣтствія между точками одной и той же плоскости и именно тотъ частный видъ, когда двойныхъ точекъ имѣется не четыре, а бесчисленное множество. Такими точками въ этомъ случаѣ являются всѣ точки коническаго сѣченія, называемаго авторомъ инверсіоннымъ (*Inversionseigelschnitt*). Во введеніи указываются авторомъ главные свойства этого соотвѣтствія и приемы для построенія соотвѣтственныхъ точекъ. Какъ орудіе для изслѣдованія, это соотвѣтствіе употребляется авторомъ мало; между тѣмъ въ теоретическомъ отношеніи его одного было бы достаточно для полной геометрической теоріи разсматриваемыхъ линій.

Вторая часть книги, занимающая въ ней наибольшее мѣсто по объему, есть въ то же время ея главная часть по содержанію. Она начинается выясненіемъ того, какъ по данному коническому сѣченію получается кривая 4-го порядка, или обратно, въ случаяхъ какъ общаго квадратичнаго преобразованія, такъ и указаннаго выше его частнаго вида, употребляемаго авторомъ для его построеній.

Главные точки предполагаются дѣйствительными, и, слѣдовательно, случай кривыхъ 4-го порядка, имѣющихъ мнимыя двойныя точки, временно устраняется изъ разсмотрѣнія. Обѣ кривыя, какъ коническое сѣченія такъ и кривая 4-го порядка, являются квадратичными изображеніями другъ друга, и изъ нихъ первое, какъ такое, отъ котораго нужно исходить,

чтобы дѣлать заключенія о второмъ, авторъ называетъ основнымъ коническимъ сѣченіемъ (Grundkegelschnitt).

Съ большими подробностями останавливается авторъ на способахъ построения точекъ пересѣченія и прикосновенія кривой 4-го порядка съ прямою. Затѣмъ, изъ разсмотрѣнія различныхъ возможныхъ случаевъ въ расположеніи основного конического сѣченія относительно главнаго треугольника выясняется характеръ двойныхъ точекъ, какъ узловыхъ, уединенныхъ и точекъ возврата. Даются построения касательныхъ къ кривой 4-го порядка какъ въ обыкновенныхъ, такъ и въ двойныхъ точкахъ, а также такъ называемыхъ тангенціальныхъ точекъ, т. е. точекъ, въ которыхъ касательная встрѣчаетъ кривую, кромѣ точки прикосновенія. Попутно обнаруживается справедливость теоремы, что шесть касательныхъ въ трехъ двойныхъ точкахъ суть касательныя къ одному коническому сѣченію, и ея частный видъ для случая трехъ точекъ возврата. Изъ отношенія основного конического сѣченія къ главному кругу выясняются возможные отношенія кривой 4-го порядка къ бесконечно удаленной прямой, т. е. число и расположеніе бесконечныхъ вѣтвей этой кривой.

Кривая 4-го порядка можетъ имѣть двойныя касательныя. Вопросъ о числѣ и расположеніи этихъ касательныхъ, въ особенности о случаяхъ ихъ существованія или несуществованія, представляетъ большой интересъ. Понятно, что при посредствѣ квадратичнаго преобразованія вопросъ этотъ превращается въ отысканіе конического сѣченія, проходящаго черезъ три данныя точки и соприкасающагося съ даннымъ коническимъ сѣченіемъ. Существуетъ изящное геометрическое рѣшеніе этой задачи, о которомъ достаточно сказать, что дѣло сводится на отысканіе двойныхъ точекъ инволюцій, опредѣляемыхъ данными точками и даннымъ коническимъ сѣченіемъ. Изъ этого рѣшенія выясняется, что двойныхъ касательныхъ къ уникурсальной кривой 4-го порядка должно существовать четыре и что въ частныхъ случаяхъ нѣкоторые изъ нихъ могутъ быть мнимыя или такъ наз. идеальныя (дѣйствительныя съ мнимыми точками прикосновенія). Всѣ эти случаи авторомъ разобраны.

Кривая 4-го порядка может имѣть еще точки перегиба. Вопросъ о числѣ и расположеніи ихъ, съ геометрической точки зрѣнія, значительно труднѣе, чѣмъ о двойныхъ касательныхъ. Посредствомъ квадратичнаго преобразованія онъ превращается въ отысканіе конического сѣченія, проходящаго черезъ три данныя точки и имѣющаго съ даннымъ коническимъ сѣченіемъ соприкосновеніе 2-го порядка.

На разработку приѣма, приводящаго къ рѣшенію и изслѣдованію этого вопроса, положено авторомъ болѣе всего самостоятельнаго труда. Получается рѣшеніе полное, но нельзя отрицать, что приѣмъ въ томъ видѣ, какъ онъ представленъ въ книгѣ, до крайности сложенъ. Въ виду того, что общее число точекъ перегиба для универсальной кривой 4-го порядка есть шесть, вопросъ можетъ сводиться на пересѣченіе конического сѣченія съ линіей, по крайней мѣрѣ, 3-го порядка и, конечно, не можетъ быть столь же простымъ, какъ построеніе двойныхъ касательныхъ. Тѣмъ не менѣе, кажется несоразмѣрнымъ, что двѣ большія главы, въ которыхъ говорится о различныхъ системахъ точекъ на коническихъ сѣченіяхъ и кривыхъ 4-го порядка и объ устанавливаемыхъ между ними соотвѣтствіяхъ, дающихъ образованіе особаго рода дирекціоннымъ кривымъ, не имѣютъ другого назначенія, какъ только подготовленіе къ рѣшенію вопроса. Приходится думать, что либо предлагаемый аппаратъ болѣе сложенъ, чѣмъ нужно для его примѣненія, либо описаніе его осложнено подробностями, безъ которыхъ можно было бы обойтись.

Покончивши съ вопросомъ о точкахъ перегиба въ его общемъ видѣ, авторъ посвящаетъ особую главу случаямъ, когда перегибъ имѣетъ мѣсто въ одной или нѣсколькихъ двойныхъ точкахъ.

Особая глава посвящается также примѣненію другого вида квадратичнаго преобразованія, которымъ преобразуются точки въ прямыя линіи и обратно и которое можетъ быть воспроизведено комбинаціе прежняго квадратичнаго преобразованія и преобразованія полярнаго. Вся особенность въ примѣненіи въ кривымъ 4-го порядка получается при этомъ

лишь въ томъ, что основное коническое сѣченіе приходится разсматривать не какъ геометрическое мѣсто точекъ, а какъ систему огибающихъ прямыхъ.

Въ относительномъ расположеніи кривой 4-го порядка и конического сѣченія заслуживаетъ особеннаго вниманія случай, когда восемь точекъ пересѣченія этихъ кривыхъ сливаются между собою по двѣ, такъ что кривыя становятся соприкасающимися въ четырехъ точкахъ. Возникаетъ вопросъ, для всякой ли раціональной кривой 4-го порядка возможны такіа четырежды соприкасающіяся коническія сѣченія и если возможны, то въ какомъ числѣ и расположеніи. Пользоваться для рѣшенія этого вопроса квадратичнымъ преобразованиемъ такимъ же образомъ, какъ для отысканія прямыхъ дважды касающихся къ кривой, конечно, нельзя, потому что, преобразуя одновременно обѣ кривыя, мы съ пониженіемъ порядка одной неизбежно повышаемъ порядокъ другой, такъ что никакого упрощенія достигнуто быть не можетъ. Тѣмъ не менѣе, не что другое, какъ квадратичное преобразование, можетъ дать простое рѣшеніе вопроса.

Коническому сѣченію; четырежды соприкасающемуся съ раціональной кривой 4-го порядка, авторъ посвящаетъ особую главу, въ которой подробно описывается способъ образованія кривыхъ этого рода, представляющій, собственно говоря, проективное обобщеніе образованія подеръ или педальныхъ кривыхъ (*Fusspunktencurven*), т. е. кривыхъ, образуемыхъ основаніями перпендикуляровъ изъ данной точки на касательныя къ данной кривой. Въ этой главѣ разсматриваются снова, въ примѣненіи къ вновь устанавливаемому взгляду на кривыя, тѣ же конструктивные приемы, какъ и въ предыдущихъ главахъ. Для самаго же вопроса о четырежды соприкасающихся коническихъ сѣченіяхъ выясняется только то, что для всякой раціональной кривой 4-го порядка такихъ коническихъ сѣченій, можетъ быть безконечное множество. Можно пожалѣть, что авторомъ не обращено вниманія на то обстоятельство, что при квадратичномъ соответствіи двухъ совмѣщенныхъ плоскостей двойныя точки, колы скоро чрезъ нихъ проходитъ данная кривая, суть точки пересѣченія ея съ тою, въ кото-

рую она преобразуется. Изъ этого замѣчанія (въ особенности если пользоваться инверсіей, когда двойныхъ точекъ безконечно много) открывается простой путь къ геометрическому рѣшенію вопроса.

Съ геометрической точки зрѣнія большой интересъ представляютъ многіе частные виды кривыхъ 4-го порядка, ихъ внѣшніе признаки и относительное расположеніе ихъ частей или вѣтвей. Посвящая часть своего труда такимъ частнымъ видамъ кривыхъ, авторъ обращаетъ прежде всего вниманіе на кривыя, къ числу точекъ которыхъ принадлежать такъ наз. циклическія безконечно удаленныя точки. Эти кривыя онъ называетъ циркулярными и воспроизводитъ разсматриваемымъ имъ квадратичнымъ преобразованиемъ, предполагая, что основное коническое сѣченіе есть кругъ. Вычерчиваніе кривыхъ достигается въ этомъ случаѣ довольно просто. Особенный интересъ представляютъ симметричныя кривыя, получающіяся, когда главный треугольникъ равносторонній и основное коническое сѣченіе есть кругъ съ нимъ концентричный. Всѣ эти кривыя суть тѣ, которыя воспроизводятся катаніемъ одного круга по другому и представляютъ частные виды гипоциклоидъ.

Между двойными точками раціональной кривой 4-го порядка возможно совпаденіе. Соответственно этому и въ квадратичномъ преобразованіи, употребляемомъ съ цѣлью воспроизведенія и изслѣдованія такихъ кривыхъ должны предполагаться совпадающими двѣ вершины каждаго главнаго треугольника. Этотъ частный случай преобразованія былъ указанъ авторомъ во введеніи. Пользуясь имъ въ одной изъ главъ 2-й части книги, онъ воспроизводитъ раціональныя кривыя 4-го порядка самосоприкасающіяся (Contactcurven). Всякая такая кривая, кромѣ точки самоприкосновенія должна имѣть еще одну (и только одну) двойную точку, которая можетъ быть также уединенною или точкою возврата. Повторяя для кривыхъ этого рода тѣ же приемы, которые служили для опредѣленія двойныхъ касательныхъ и точекъ перегиба въ общемъ случаѣ, авторъ обнаруживаетъ, какія зависимости должны имѣть мѣсто между этими элементами и сколько изъ

нихъ, вслѣдствіе этихъ зависимостей, должно быть мнимыхъ или совпадающихъ. Самосоприкасающіяся кривыя могутъ быть во то же время циркулярными и въ частности обладать свойствами симетріи.

Изъ трехъ двойныхъ точекъ раціональной кривой 4-го порядка двѣ могутъ быть мнимыми. Кривыя съ мнимыми двойными точками представляютъ столь же общій родъ, какъ и тѣ, для которыхъ всѣ три двойныя точки дѣйствительны. Такъ какъ употребленіе квадратичнаго преобразованія съ дѣйствительными главными треугольниками, служившаго автору орудіемъ для всѣхъ предыдущихъ изслѣдованій, оказывается непригоднымъ для этого рода кривыхъ, то онъ владетъ въ основаніе ихъ изслѣдованія указанное раньше образованіе, представляющее проективное обобщеніе способа образованія подэръ. Это ставитъ его въ необходимость повторять примѣнительно къ новому воззрѣнію на кривыя тѣ же элементарныя построенія и выводы, которые подробно изложены для предыдущихъ основоположеній. Въ результатъ получается большая глава, не дающая въ сущности ничего новаго. То же новое, что обуславливается мнимостью двойныхъ точекъ, могло бы быть обнаружено, какъ сейчасъ увидимъ, другимъ путемъ гораздо быстрее.

Главѣ о кривыхъ съ мнимыми двойными точками авторъ предпосылаетъ небольшую главу, посвященную инверсіи, какъ средству воспроизведенія раціональныхъ кривыхъ 4-го порядка изъ коническихъ сѣченій. Безъ сомнѣнія, авторъ зналъ, что, смотря по тому, будетъ ли центръ инверсіи находиться внѣ или внутри инверсіоннаго коническаго сѣченія, воспроизводимая кривая будетъ съ дѣйствительными или съ мнимыми двойными точками. Употребляя инверсію, какъ орудіе изслѣдованія, онъ могъ бы охватить сразу оба рода кривыхъ, указывая лишь попутно конкретныя особенности, свойственныя какъ тому, такъ и другому. При этомъ и самосоприкасающіяся кривыя получились бы въ частномъ случаѣ, когда центръ инверсіи лежитъ на инверсіонномъ коническомъ сѣченіи. Причина, по которой авторъ не пошелъ, однако, по этому широкому пути, а предпочелъ пользоваться различными кон-



структивными приемами для кривых того и другого рода, вѣроятно, лежитъ въ цѣляхъ воспроизведенія конкретных формъ кривыхъ посредствомъ черченія.

Двѣ мнимыя двойныя точки могутъ въ частности быть циклическими бесконечно удаленными точками. Кривыя такого частнаго вида рассматриваются авторомъ въ особой главѣ подъ названіемъ бициркулярныхъ. Всѣ онѣ суть подѣры и между ними особенный интересъ представляютъ тѣ, которыя имѣютъ двѣ перпендикулярныя между собою оси симетріи. Къ числу послѣднихъ принадлежитъ, между прочимъ, лемниската. Всѣ эти кривыя, какъ и вообще раціональныя кривыя 4-го порядка, суть 6-го класса. Но возможны случаи, когда классъ понижается на двѣ и на три единицы. Первое представляется тогда, когда мнимыя двойныя точки обладаютъ свойствомъ точекъ возврата. Кривая въ этихъ условіяхъ есть не что иное, какъ эпициклоида, для которой радіусъ катящагося круга равняется радіусу основнаго круга. Второе имѣетъ мѣсто тогда, когда при всѣхъ прежнихъ условіяхъ и дѣйствительная точка есть точка возврата. Эта кривая 4-го порядка и 3-го класса есть такъ называемая кардіоида.

Всѣ вообще кривыя 4-го порядка и 3-го класса какъ съ дѣйствительными, такъ и съ мнимыми точками возврата преобразуются полярно въ кривыя 3-го порядка и 4-го класса. Вслѣдствіе этого разсмотрѣніе ихъ, какъ огибаемыхъ прямыми, представляетъ задачу, аналогичную съ изслѣдованіемъ общихъ раціональныхъ кривыхъ 3-го порядка. Этому разсмотрѣнію посвящается предпоследняя глава 2-й части, причемъ сперва дается способъ образованія кривыхъ и воспроизведенія ихъ черченіемъ, а затѣмъ указываются ихъ частныя особенности. Понятно, что ни къ какимъ новымъ заключеніямъ сравнительно съ результатами предыдущихъ главъ это изслѣдованіе привести не могло.

Въ заключеніе второй части авторъ даетъ краткій обзоръ конкретныхъ формъ раціональныхъ кривыхъ 4-го порядка, распредѣляя эти кривыя по признакамъ, обуславливаемымъ, съ одной стороны, отношеніемъ кривой къ бесконечно удаленной прямой линіи или, что все то же, отношеніемъ

основного конического сѣченія къ главному кругу, а, съ другой, отношеніями также основного конического сѣченія къ сторонамъ главнаго треугольника. Признаками перваго рода указывается присутствіе и число безконечныхъ вѣтвей кривой, а отъ признаковъ втораго рода зависитъ характеръ двойныхъ точекъ и тѣсно связанная съ ними группировка двойныхъ касательныхъ и точекъ перегиба. Уясненію всѣхъ этихъ видимыхъ особенностей много содѣйствуютъ тщательно выполненныя чертежи, приложенныя въ концѣ книги.

Третья и послѣдняя часть книги посвящена кривымъ 3-го порядка и имѣетъ значительно меньшій объемъ и интересъ, чѣмъ вторая. Въ ней повторяются главнымъ образомъ тѣ же соображенія и построенія, что и во второй части, но лишь въ примѣненіи къ случаю, когда раціональная кривая 4-го порядка распадается на кривую 3-го порядка и прямую. При этомъ тѣ свойства кривыхъ, на которыя не вліяетъ такое распаденіе, являются почти буквальнымъ воспроизведеніемъ уже извѣстныхъ; тѣ же, которыя возникаютъ, какъ слѣдствіе такого распаденія, и относятся исключительно къ кривой 3-го порядка, какъ къ части цѣлаго, получаютъ очень просто и наглядно.

Нужно замѣтить, сверхъ того, что почти все, что говорится у автора о разсматриваемыхъ кривыхъ въ этой части, встрѣчается во многихъ другихъ сочиненіяхъ, посвященныхъ этому предмету и все преимущество въ изложеніи автора заключается въ подробномъ описаніи процессовъ построенія. Въ концѣ книги находится также обзоръ конкретныхъ формъ кривыхъ 3-го порядка, разнообразіе которыхъ, конечно, значительно менѣе, чѣмъ для кривыхъ 4-го порядка. Единственная двойная точка кривой можетъ быть узловою, или уединенною, или точкой возврата. Въ первомъ и третьемъ случаяхъ кривая имѣетъ только одну точку перегиба, во второмъ три, расположенныя на одной прямой. Двойныхъ касательныхъ вовсе быть не можетъ.

Вообще, книга Binder'a заключаетъ въ себѣ обильный конструктивный матеріалъ, но мало научныхъ результатовъ, могущихъ послужить руководящимъ началомъ для другихъ

изслѣдованій. По своему направленію авторъ находится, по-видимому, подъ вліяніемъ трудовъ покойнаго Эмиля Вейра и не можетъ быть причисленъ къ вѣрнымъ послѣдователямъ широкихъ воззрѣній Штейнера на задачи синтетической геометріи. Ссылки и литературныхъ указаній въ книгѣ Binder'a почти совсѣмъ нѣтъ, хотя несомнѣнно, что вся первая часть, названная введеніемъ, представляетъ заимствованія.

Въ особенную заслугу автору необходимо вмѣнить доведеніе изслѣдованія посредствомъ построеній до полного отчетливаго представленія о предметѣ во всѣхъ его конкретныхъ подробностяхъ. Чертежи выполнены превосходно и для составленія, при помощи воображенія, понятія о природѣ кривыхъ линій даютъ болѣе, чѣмъ многія отвлеченныя соотношенія и описанія.

Къ числу недостатковъ книги нужно отнести слишкомъ большую растянутость изложенія и напрасныя утомительныя повторенія. Во всемъ сказывается, что книга соединяетъ въ себѣ отдѣльныя разновременныя работы, при чемъ цѣлому не придано объединяющаго освѣщенія.

Автору принадлежитъ еще нѣсколько другихъ небольшихъ работъ, изъ которыхъ одна составляетъ, можно сказать, непосредственное продолженіе разсматриваемой нами книги. Въ ней разсматриваются такія точки раціональныхъ кривыхъ 4-го порядка, которыя могутъ быть названы точками возвратнаго перегиба (Undulationspunkte). Это тѣ точки, въ которыхъ кривая имѣетъ съ прямою линіей соприкосновеніе 3-го порядка. Посредствомъ квадратичнаго преобразованія разысканіе такихъ точекъ сводится къ нахожденію конического сѣченія, проходящаго черезъ три данныя точки и имѣющаго соприкосновеніе 3-го порядка съ даннымъ коническимъ сѣченіемъ. Ясно, что эта задача возможна только при исключительномъ расположеніи данныхъ и что, слѣдовательно, кривыя, обладающія точками названнаго характера, должны считаться особенными.

Работа, посвященная послѣднему вопросу, носитъ заглавіе: „Die Undulationen ebener Curven C<sub>4</sub>“ и представляетъ сообщеніе, сдѣланное академіи наукъ въ Вѣнѣ въ ап-

рѣлѣ 1897 г. Руководящіе приемы въ ней тѣ же, что и въ главномъ трудѣ автора. Прекрасно выполненные чертежи также иллюстрируютъ вопросъ во всѣхъ его частностяхъ.

Остальныя мелкія работы автора относятся къ предметамъ меньшаго научнаго значенія и, какъ спутники главнаго труда, ничего существеннаго къ его оцѣнкѣ прибавить не могутъ.

Своими изслѣдованіями проф. Binder несомнѣнно содѣйствовалъ уясненію свойствъ разсмотрѣнныхъ имъ кривыхъ и установленію въ наукѣ отчетливаго нагляднаго представленія объ этихъ кривыхъ, какъ ближайшихъ, по геометрической природѣ, къ коническимъ сѣченіямъ. Въ этомъ смыслѣ труды его могутъ быть признаны заслуживающими поощренія.

Н. Андреевъ.

# PRIX LOBATCHEFSKY

(SECOND CONCOURS 1900).

La Société Physico-mathématique de Kasan a l'honneur d'informer qu' elle a décerné dans sa séance solennelle de 4 Novembre (22 Octobre) 1900 d'après le § 7 du règlement\*) le prix de N. J. Lobatchefsky à M. W. Killing, professeur ordinaire à l'Académie de Münster, pour son ouvrage: «Einführung in die Grundlagen der Geometrie» Bd. I, II. Paderborn. 1893—1898 et ses autres mémoires relatifs à la géométrie non-euclidienne et à la théorie des groupes des transformations. Les mentions honorables sont décernées à M. A. Whitehead, Fellow of Trinity College, pour son ouvrage: «Universal Algebra» Cambridge 1898 et à M. W. Binder, professeur à l'école supérieure technique de Wienerneustadt, pour son ouvrage, Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung (Leipz. 1896) et autres mémoires.

Les médailles d'or de N. J. Lobatchefsky, destinées selon le § 16 du règlement du prix Lobatchefsky à re-

---

\*) § 7. Dans le cas où se présenteront plusieurs ouvrages d'égale valeur c'est le tirage au sort qui en décidera. La Commission de la Société Physico-mathématique a estimé égaux dans leur mérite scientifique les ouvrages de M. Killing et de M. Whitehead.

compenser le travail des personnes qui aident à la Société physico-mathématique de Kasan à examiner les ouvrages, présentés au concours, ont été décernées dans la même séance solennelle de 4 Novembre 1900 à M. F. Engel, professeur ordinaire à l'Université de Göttingue, pour son rapport sur l'ouvrage de M. Killing et à M. K. Andreief, professeur ém. à l'Université de Moscou, pour son rapport sur l'ouvrage de M. Binder.

Pour exprimer son extreme reconnaissance à M. R. Ball, professeur de l'astronomie et de Géométrie à Cambridge, pour le rapport qu'il a bien voulu écrire sur l'ouvrage de M. Whitehead, la Société Physico-mathématique a résolu de lui conférer le titre du membre honoraire de la Société Physico-mathématique.

En outre un rapport sur un ouvrage présenté au concours a été écrit par M. Porfirief, secrétaire de la commission.

---

### **EXTRAIT DU RÉGLEMENT DU PRIX LOBATCHEFSKY.**

Le prix Lobatchefsky est décerné tous les trois ans. Il est d'une valeur de 500 roubles papiers. Il reste à la volonté de la Société d'en augmenter avec le temps la valeur, si l'état du capital le lui permet. (§ 4)

Le prix Lobatchefsky est destiné aux ouvrages relatifs à la géométrie, et de préférence à la géométrie non-Euclidienne. (§ 5)

Sont admis à concourir à ce prix les ouvrages imprimés en russe, français, allemand, anglais, italien et latin, adressés à la Société Physico-Mathématique par leurs auteurs et publiés dans le cours des six années qui auront précédé le jugement de la Société concernant le prix. (§ 6)

Dans aucun cas le prix ne peut être partagé entre deux ou plusieurs auteurs concurrents. Dans le cas où se présenteront plusieurs ouvrages d'égale valeur, c'est le tirage au sort qui en décidera. (§ 7)

---

Le prix sera décerné pour la troisième fois le 4 Novembre 1903. Selon le § 11 du règlement, les ouvrages, destinés au concours doivent être adressés à la Société Physico-mathématique de Kasan jusqu'à 4 Novembre 1902.

Président de la Société Physico-mathématique

A. Vassilief.

20 Janvier 1901.





На основаніи Высочайшаго повелѣнія  
отъ 19 Декабря 1895 года утверждаю, 24 Декабря  
1895 г. Министръ Народнаго Просвѣщенія, Слѣд-  
ственный Секретарь *Графъ Деляновъ*.

## ПОЛОЖЕНІЕ

### о преміи имени профессора Н. И. Лобачевскаго.

#### § 1.

Премія имени Н. И. Лобачевскаго образуется изъ процентовъ съ капитала въ шесть тысячъ рублей, отдѣленныхъ для этой цѣли Физико-математическимъ Обществомъ при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ изъ суммы, собранной имъ для увековѣченія имени Н. И. Лобачевскаго.

#### § 2.

Основной капиталъ преміи остается неприкосновеннымъ на вѣчныя времена и возрастаетъ отъ причисленія къ нему неизрасходованныхъ процентовъ и вновь поступающихъ пожертвованій. Проценты съ капитала употребляются сначала исключительно на преміи и медали рецензентамъ, а также на расходы по храненію процентныхъ бумагъ капитала и другіе, сопряженные съ выдачею премій; затѣмъ, въ случаѣ увеличенія капитала, часть процентовъ можетъ быть употреблена Физико-математическимъ Обществомъ на изданіе сочиненій Н. И. Лобачевскаго и на другія научныя предпріятія, имѣющія цѣлью успѣхъ и распространеніе математическихъ знаній.

#### § 3.

Капиталъ преміи имени Н. И. Лобачевскаго, со всѣми могущими быть приращеніями, составляетъ собственность Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Обращенный въ государственныя процентныя бумаги, онъ хранится въ Казанскомъ Отдѣленіи Государственнаго Банка.

§ 4.

Премія имени Н. И. Лобачевскаго присуждается чрезъ каждые три года, въ размѣрѣ 500 кредитныхъ рублей. Съ теченіемъ времени она можетъ быть повышена по усмотрѣнію Общества, если состояніе капитала дастъ къ тому возможность.

§ 5.

Премія имени Н. И. Лобачевскаго назначается за сочиненія по геометріи, преимущественно не-Евклидовой.

§ 6.

На соисканіе преміи принимаются печатныя сочиненія на языкахъ русскомъ, французскомъ, нѣмецкомъ, англійскомъ, итальянскомъ и латинскомъ, внесенныя въ Физико-математическое Общество ихъ авторами и напечатанныя въ теченіе шести лѣтъ, предшествовавшихъ присужденію преміи.

§ 7

Премія ни въ какомъ случаѣ не раздѣляется между авторами двухъ или нѣсколькихъ сочиненій. Въ случаѣ представленія работъ равнаго достоинства премія присуждается по жребію.

§ 8.

Въ случаѣ, если ни одно изъ представленныхъ на конкурсѣ сочиненій не удостоится преміи, то оставшаяся не выданною премія выдается въ слѣдующій срокъ, независимо отъ очередной преміи и при томъ за сочиненіе, написанное на темѣ по чистой математикѣ, предложенную Физико-математическимъ Обществомъ. Такое сочиненіе можетъ быть представлено и въ рукописи. Не выданная и послѣ сего премія причисляется къ основному капиталу.

§ 9.

Право на полученіе преміи принадлежитъ только самому автору удостоеннаго сочиненія, но отнюдь не издателю; въ случаѣ смерти автора она выдается законнымъ его наследникамъ.

§ 10.

Въ случаѣ, если удостоенное преміи сочиненіе представлено въ рукописи (см. § 8), Физико-математическое Общество имѣетъ право въ теченіе года напечатать его въ своихъ изданіяхъ, при чемъ автору сочиненія выдается двѣсти отдѣльных оттисковъ.

§ 11.

Сочиненія, предназначаемыя на конкурсъ, должны быть доставлены въ Физико-математическое Общество не позже, какъ за годъ до дня присужденія преміи—22 Октября стараго стиля.

Первая премія присуждается 22 Октября 1897 года.

§ 12.

Для рассмотрѣнія представленныхъ на соисканіе каждой преміи сочиненій Физико-математическое Общество не позже 15 Ноября оставляетъ спеціальную комиссію въ числѣ семи членовъ подъ предсѣдательствомъ Предсѣдателя Физико-математическаго Общества. Въ число членовъ комиссіи обязательно приглашаются профессора чистой математики Императорскаго Казанскаго Университета.

§ 13.

Комиссія избираетъ изъ числа русскихъ или иностранныхъ ученыхъ референтовъ. Члены комиссіи могутъ быть избраны въ референты.

§ 14.

На основаніи письменныхъ отзывовъ референтовъ комиссія большинствомъ голосовъ присуждаетъ премію. Сочиненія, не получившія преміи, могутъ быть удостоены почетнаго отзыва.

§ 15.

Присужденіе премій и почетныхъ отзывовъ провозглашается въ засѣданіи Физико-математическаго Общества, происходящемъ 22 Октября, при чемъ читаются отзывы референтовъ о сочиненіяхъ, признанныхъ заслуживающими преміи или

почетнаго отзыва, и заключеніе комиссіи. Докладъ комиссіи и отзывы референтовъ печатаются въ „Извѣстіяхъ Физико-математическаго Общества“.

§ 16.

Лицамъ, коимъ будетъ порученъ разборъ сочиненій представленныхъ къ соисканію преміи, за труды ихъ по таковому критическому разбору могутъ быть присуждаемы Физико-математическимъ Обществомъ по докладу комиссіи золотыя медали имени Лобачевскаго съ его изображеніемъ. Медали эти изготовляются на проценты съ капитала, остающіеся послѣ выдачи премій.

§ 17.

Физико-математическому Обществу предоставляется ходатайствовать въ установленномъ порядкѣ объ измѣненіи положенія о преміи имени Н. И. Лобачевскаго съ соблюденіемъ однако того правила, что премія назначается за сочиненія по математикѣ, написанныя на одномъ изъ общедоступныхъ ученымъ языковъ.

---

Par ordonnance de Sa Majesté Impériale du  
19 Décembre 1895 je confirme, ce 24 Décembre 1895,

Le Ministre de l'Instruction Publique,

Secrétaire d'Etat,

Comte Délianof.

## RÈGLEMENT DU PRIX LOBATCHEFSKY.

### § 1.

Le prix Lobatchefsky se compose des intérêts du capital de 6000 roubles, prélevé par la Société Physico-Mathématique à l'Université Impériale de Kazan sur les sommes recueillies par elle pour éterniser le nom de N. J. Lobatchefsky.

### § 2.

Le capital qui constitue le fonds de ce prix reste pour toujours intact et peut s'accroître des intérêts non employés et de nouvelles contributions. Les intérêts du capital sont d'abord exclusivement employés à fournir les prix et les médailles décernés aux auteurs des comptes-rendus, ensuite à couvrir les frais du dépôt à la banque des papiers représentant le capital et ceux qui dépendent de la distribution des prix. Si le capital venait à s'accroître, la Société Physico-Mathématique pourrait employer une partie des intérêts à la réimpression des oeuvres de Lobatchefsky ou à d'autres entreprises ayant pour but le progrès et la propagation des connaissances mathématiques.

### § 3.

Le capital fournissant le prix Lobatchefsky reste, avec tous les accroissements qui pourraient survenir, la propriété de la Société Physico-Mathématique de l'Université Impériale

les ouvrages jugés dignes du prix et des mentions honorables et la conclusion de la commission. Le rapport de la commission et les comptes-rendus des rapporteurs seront publiés dans le „Bulletin de la Société Physico-Mathématique“.

§ 16.

Pour récompenser le travail des personnes qui auront eu à examiner les ouvrages présentés au concours, la Société Physico-Mathématique pourra, sur le rapport de la commission, adjuger des médailles d'or du nom de Lobatchefsky ornées de son effigie. Ces médailles seront exécutées sur les sommes qui resteront des intérêts du capital après la distribution des prix.

§ 17.

La Société Physico-Mathématique se réserve le droit de faire les démarches nécessaires d'après l'ordre établi pour modifier le statut concernant le prix Lobatchefsky en observant toutefois ce principe que le prix ne peut être décerné qu'à des ouvrages de mathématiques, écrits dans une des langues généralement entendues par les savants.



Подписка на 1901 годъ  
НА ЕЖЕМЪСЯЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКІЙ ЖУРНАЛЪ

„ЗАПИСКИ“

„императорскаго русскаго техническаго  
общества“.

(тридцать четвертый годъ изданія).

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА:

Дѣятельность Общества: Журналы общихъ Собраній Общества и засѣданій Совѣта Общества и его отдѣлы: I-го—Химическаго, II-го—Механическаго, III-го—Строительнаго, IV-го—Военно-морского, V-го—Фотографическаго, VI—Электро-техническаго, VII-го—Воздухоплавательнаго, VIII-го—Железнодорожнаго, IX-го—По Техническому образованію. Журналы засѣданій многогородныхъ отдѣленій Общества, доставленные въ редакцію. Годовые отчеты дѣятельности Общества и его многогородныхъ отдѣленій. Труды Общества: Доклады, читанные въ засѣданіяхъ Общества, и работы его членовъ. Техническая Литература: Статьи и новости по различнымъ отраслямъ техники. Библиографія. Правительственныя распоряженія, имѣющія отношеніе къ технике и технической промышленности. Обзоръ привилегій, выдаваемыхъ въ Россіи: наиболее замѣчательныя и интересныя изъ нихъ помѣщаются въ подробномъ изложеніи, съ чертежами, а изъ прочихъ—извлекается сущность предмета каждой привилегіи. Указатели продленія сроковъ и прекращенія привилегій, а также испрашиваемыхъ привилегій, на которыя выданы охранительныя свидѣтельства, и уничтоженныхъ охранительныхъ свидѣтельствъ. Записки И. Т. О. составляютъ единственный органъ, въ которомъ сгруппированны вѣсть всѣ означенныя свѣдѣнія о привилегіяхъ.

Изъ изложенной программы видно, что главная цѣль журнала—служить органомъ дѣятельности И. Р. Т. О. и трудовъ его членовъ. Приложение вышеупомянутаго Обзора привилегій придаетъ этому органу интересъ—зеркала техническихъ успѣховъ и изобрѣтательности въ Россіи.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА: Съ доставкой    Съ перес.  
и пересылкой.    за гран.

|                      |         |         |
|----------------------|---------|---------|
| На годъ . . . . .    | 12 руб. | 16 руб. |
| На полгода . . . . . | 7       | 9       |

Подписка принимается въ Редакціи: С.-Петербургъ, Пантелеймонская, № 2, и у книгопродавцевъ. Гг. иногородные благоволятъ обращаться преимущественно въ Редакцію.

«Записки Императорскаго Русскаго Техническаго Общества» за прежніе годы можно пріобрѣтать въ Редакціи. Съ 1867 по 1887 г. по 4 р., а за послѣдующіе годы по 8 р. за годъ; за отдѣльный выпускъ 1 р. 50 к. За текущій и предшествующій ему годы по 12 р. за годъ и по 2 р. за выпускъ. За 28 лѣтъ (1867, 1869—88, 1886—87 и 1889—98) цѣна въ сложности опредѣлена въ 100 руб. съ доставкой и пересылкой, а для школьных, общественныхъ и частныхъ библіотекъ 60 р. За годы 1868, 1884, 1885, и 1888 «Записки» всѣ разошлись.

## Тарифъ за объявленія:

| За 1 годъ                                                  | За 1/2 года | За 3 мѣс. | За 1 мѣс. |
|------------------------------------------------------------|-------------|-----------|-----------|
| 1 страница впереди текста.                                 |             |           |           |
| 100 руб.                                                   | 60 руб.     | 35 руб.   | 15 руб.   |
| 1/2 страницы впереди текста, или 1 страница позади текста. |             |           |           |
| 60 руб.                                                    | 35 руб.     | 20 руб.   | 9 руб.    |
| 1/2 страницы позади текста.                                |             |           |           |
| 35 руб.                                                    | 20 руб.     | 12 руб.   | 5 руб.    |

Обложка и включительныя страницы по соглашенію.

Вкладыши за 1000 шт. (до 1 лота въса каждое) 15 руб. Со вклейкою въ текстъ 20 руб.

За каждое измѣненіе въ текстѣ годовыхъ, полугодовыхъ и трехмѣсячныхъ объявленій по 5 рублей.

Деньги при заказѣ объявленій уплачиваются впередъ.

Редакторъ А. Н. СИГУНОВЪ.

---



# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

/ И

## ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый. подъ редакціей профессора В. А. Циммермана.

Въ настоящее время выходитъ XXIV семестръ. Предыдущіе семестры были неоднократно рекомендованы для различныхъ учебныхъ заведеній: Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, городскихъ училищъ, учительскихъ институтовъ и семинарій. Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ Заведеній—для военно учебныхъ заведеній, №№ 1—48 одобрены Ученымъ Комитетомъ при Св. Синодѣ для духовныхъ семинарій и училищъ.

Программа журнала: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи, предложенныя на испытаніяхъ зрѣлости. Библиографическій отдѣлъ; обзоръ иностранныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ. Объявленія

Статьи составляются въ такой мѣрѣ популярно, въ какой это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла. Статьи, посвященныя педагогическимъ вопросамъ, имѣютъ главной цѣлью обмѣнъ мнѣній и взглядовъ преподавателей по различнымъ вопросамъ преподаванія элементарной математики и физики. Въ отдѣлѣ «Научная хроника» помѣщаются рефераты о важнѣйшихъ научныхъ работахъ, отчеты о сѣздахъ, конгрессахъ и т. п. Въ отдѣлѣ «Разныя извѣстія» помѣщаются свѣдѣнія о текущихъ событіяхъ въ жизни различныхъ ученыхъ и учебныхъ заведеній. Помѣщаемыя въ журналѣ задачи дѣлятся на двѣ категоріи: болѣе легкія, доступныя хорошему ученику и болѣе трудныя, требующія болѣе большой подготовки. Отъ времени до времени предлагаются задачи и темы на премію.

## Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой за годъ 6 руб., за полугодіе 3 руб. Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся при непосредственныхъ сношеніяхъ съ конторой редакціи платятъ за годъ 4 руб., за полу-

годі 2 руб. Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Отдѣльные номера текущаго семестра по 30 коп., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ, Семестры XVI и XVII распроданы.

Пробный номеръ высылается по первому требованію.

Адресъ для корреспонденцій: Одесса. Въ редакцію «Вѣстникъ опытной Физики».

Городской адресъ: Нѣжинская, 47.

Редакторъ В. А. Циммерманъ. Издатель В. А. ГЕРНЕТЪ.

---

Открыта подписка на 1901 годъ (VIII-й г. изд.).

ЕЖЕМѢСЯЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ

## НАУЧНОЕ ОБОЗРѢНІЕ.

Изданіе П. П. Сойкина подъ редакціей д-ра Философіи М. М. Филиппова «Научное Обозрѣніе» не спеціальный, но общій журналъ, имѣющій въ виду всѣхъ читателей, интересующихся успѣхами науки, а также выдающимися литературными явленіями. Вступая въ XX-й вѣкъ, одной изъ задачъ котораго является распространеніе научнаго образованія въ возможно широкіхъ кругахъ общества, журналъ нашъ посвятить особое вниманіе вопросамъ самообразованія. Съ этою цѣлью редакція «Научнаго Обозрѣнія» рѣшилась присоединить къ журналу рядъ популярныя сочиненій по всѣмъ отраслямъ знаній, подъ общимъ заглавіемъ: Народный университетъ. Для напечатанія въ «Народномъ университетѣ» предположено, между прочимъ, слѣдующее: Происхожденіе животнаго міра.—Міръ въ каплѣ воды.—Невидимые враги.—Происхожденіе и значеніе денегъ.—Чудеса электричества.—Мозгъ, какъ органъ мышленія.—Прогулки по небу.—Доксторическій человѣкъ. Текстъ будетъ поясненъ чертежами, рисунками и хромофотографіями. Въ историческомъ отдѣлѣ приметъ ближайшее участіе выдающійся историкъ и популяризаторъ проф. А. С. Трачевскій. Здѣсь, между прочимъ, будутъ печататься: Историческая хроника Меримэ, статьи по исторіи киевизаціи и ин. др.

Отдѣлъ обзора журналовъ русскихъ и иностранныхъ будетъ значительно расширенъ, что дастъ читателямъ возможность въ сжатомъ изложеніи слѣдить за современнымъ движеніемъ человеческой мысли, открытіями, изобрѣтеніями, новостями литературы, искусства и науки. Подписная цѣна на годъ безъ доставки въ Спб. 6 р. 50 к. Съ доставкой и пересылкою по всей Россіи 7 р. За границу 10 р. Допускается разсрочка: при подпискѣ 2 р., къ 1 апрѣля 2 р. и къ 1 іюня остальные, или по одному рублю, начиная съ декабря.

Адресъ конторы редакціи: С.-Петербургъ, стремянная ул., № 12, собств. домъ.

**Издания Физико-математического Общества и физико-математической секции Общества Естественных Испытателей при Императорском Казанском Университетѣ**

1) Собрание протоколовъ засѣданій секціи Физико-математич. наукъ Общ. Естеств. при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ (т. 1-й распроданъ; цѣна томовъ 2—8 съ портретами Н. И. Лобачевского, М. А. Ковальскаго, П. И. Котельникова и Н. С. Громеки—7 р.).

2—4) Брошюры «М. А. Ковальскій» «П. И. Котельниковъ» «Н. С. Громека» съ кабинетн. порт. по 60 к.

5) Уставъ Физико-математическаго Общества Ц. 5 к.

6) Каталогъ библіотеки секціи; ц. 25 к.

7) Счетъ и измѣреніе—Гельмгольца. Понятіе о числѣ—Кронекера переводъ проф. А. Васильева. Ц. 50 к.

8) Систем. указатель книгъ и статей по чистой и приклад. математикѣ, напечатанныхъ въ Казани, сост. Д. М. Синцовъ. Ц. 25 к.

9) Вейерштрассъ. О Лудольфовомъ числѣ (доказательство невозможности квадратуры круга) пер. Н. А. Скаловубова подъ ред. проф. А. Васильева. Ц. 30 к.

10—11) Конспекты публичныхъ лекцій, устроенныхъ Физико-Математическимъ Обществомъ весною 1895 г. (Ц. 30 к.) и весною 1896 г. (ц. 20 к.)

12) Ф. Клейнъ. Сравнительное обозрѣніе новѣйшихъ геометрическихъ исследований. Пер. Д. Синцовъ. Цѣна 35 к.

13) Торжество открытія памятника Н. И. Лобачевского 1 Сент. 1896 г. Ц. съ фототипіей памятника 25 к., безъ фот. 15 к.

14—15) Первое присужденіе преміи Н. И. Лобачевского въ 1897 г. Ц. 50 к.; Второе присужденіе преміи Н. И. Лобачевского (22 октября 1900 г. Ц. 40 к.)

16) E. Kioin. Zur ersten Vertheilung des Lobatschewsky—Preises. Цѣна 50 коп.

17) In memoriam N. I. Lobatchevskii. (Collection des mémoires présentés à la Société Ph.-M. de Kasan par Hermite, Haisted, Girardville, Laisant, Lemoine, Neuberg et Ocagne. Prix 8 fr. (ц. 3 руб.).

18) Ch. Hermite. Sur quelques développements en serie de la théorie des fonctions elliptiques. 1897. Prix 2 f. (цѣна 75 к.).

19) E. Lemoine. Géométrie. Transformation continue dans le triangle et dans le tétraèdre. 1897. Prix 3 fr. (цѣна 1 р.).

20) Ф. Клейнъ. Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи. Пер. Н. Н. Парфентьева подъ ред. Д. М. Синцова. 1898 г. Ц. 75 к.

21—24) Д. М. Синцовъ. Bibliographia mathematica rossica. Списокъ книгъ и статей по чистой математикѣ, напеч. въ Россіи—за 1896 г., за 1897 г., за 1898 г., за 1899 г. Ц. по 20 к.

25) P. Poretzky. Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques. Ц. 1 р.

26) Памяти Софуса Ли (сост. Д. М. Синцовъ). 1899 г. Ц. 30 к.

27) И. И. Аристовъ. Объ итерациіи функций. 1900 г. ц. 50 к.

Продаются въ книжныхъ магазинахъ въ Казани и выписываются отъ казначея Общества А. А. Михайловскаго. (Университетъ, астроном. обсерваторія). Выписывающіе отъ казначея за пересылку не платятъ. Отъ него-же можно выписывать: (вырученные отъ продажи деньги поступаютъ въ фондъ имени Н. И. Лобачевского).

Г. Семикольновъ. Этюды по геометріи Лобачевского. Эт. I-й (теорема Пифагора въ геометріи Лобачевского). Ц. 1 р. Эт. II-й (Объ измѣреніи площадей фигуръ). Ц. 1 р.

Празднованіе столѣтней годовщины дня рожденія Н. И. Лобачевского. Изд. Императорскаго Казанскаго Университета (съ порт. Н. И. Лобачевского) ц. 1 р.

## **„ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА**

**ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.**

„Извѣстія“, издаваемые подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ четырехъ до шести въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20-ти листовъ.

«Извѣстія» раздѣляются на два отдѣла.

1) Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ Общества.

2) Второй отдѣлъ содержитъ:

а) Лѣтопись Физико-математическаго Общества (протоколы засѣданій, извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годовыя отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ библіотеку Общества и т. п.).

б) Библіографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и заграницею сочиненіяхъ по физико-математическимъ наукамъ. Научныя новости.

в) Задачи и вопросы, предлагаемые для рѣшенія, и рѣшенія ихъ.

Въ «Извѣстіяхъ» могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библіографическія и другія, имѣющія отношеніе къ физико-математическимъ наукамъ.

Члены Физико-математическаго Общества пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предъидущій годъ, получаютъ Извѣстія бесплатно.

Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „ИЗВѢСТІЯ“ въ годъ 3 р. (съ доставкою и пересылкою).

Подписка принимается предсѣдателемъ Физико-математическаго Общества проф. А. В. Васильевымъ, секретаремъ Общества пр.-доц. В. А. Ульянинымъ (Университетъ) и казначеемъ Общества А. А. Михайловскимъ (Университетъ), въ Казани книжными магазинами А. А. Дубровина (Гостинный дворъ № 1) и Н. Я. Вашмакова (Воскресенская, городской пассажъ), а также всѣми извѣстными книжными магазинами.

Первую серію „Извѣстій“ составляютъ восемь томовъ „Собранія протоколовъ засѣданій секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естественныхъ наукъ при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ“.

---





This book should be returned to  
the Library on or before the last date  
stamped below.

A fine is incurred by retaining it  
beyond the specified time.

Please return promptly.

